# ÁLGEBRA LINEAL I — Práctica 3

**Matrices y determinantes** (Curso 2022–2023)

**1.–** En el conjunto de las matrices $n \times n$ de elementos reales, demostrar que el producto de matrices triangulares inferiores es otra matriz triangular inferior.

**(Primer parcial, febrero 2000)**

---

**2.–** Sea $A$ una matriz diagonal $n \times n$ y supongamos que todos los elementos de su diagonal son distintos entre sí. Demostrar que cualquier matriz $n \times n$ que conmute con $A$ ha de ser diagonal.

**(Examen final, junio 2002)**

---

**3.–** Si $A, B, X \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ son matrices inversibles, hallar $X$ en función de $A$ y $B$ sabiendo que:

$$(A^{-1}X)^{-1} = A(B^{-2}A)^{-1}.$$

Probar además que $signo(det(A)) = signo(det(X))$.

**(Examen parcial, octubre 2014)**

---

**4.–** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

(i) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$.

(ii) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(iii) Si $C$ es inversible y $AB = C$ entonces $A, B$ son inversibles.

**(Examen final, enero 2016)**

---

**5.–** Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada cumpliendo $A^2 + A + Id = 0$.

(i) Demostar que $A$ es inversible.

(ii) Probar que $A^{-1} = -(A + Id) = A^2$.

(iii) ¿Cuánto vale $A^3$? ¿Y $A^{2013}$?.

**(Examen octubre, 2013)**

---

**6.–** Calcular la potencia $n$-ésima de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

**7.**– Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+2 & x+1 \\ x+2 & x & x+4 \end{pmatrix}$$

(i) Hallar $x$ para que $det(A) = 0$.

(ii) Estudiar el rango de $A$ en función de los valores de $x$.

**(Examen final, julio 2015)**

---

**8.**– Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ cumpliendo $A^4 = A$. Analizar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) $A^3 = Id$.

(ii) $A^{34} = A$.

(iii) Si $A$ es inversible, entonces $det(A) = 1$.

(iv) Puede ocurrir que $A^2 = A$.

**(Examen, octubre 2017)**

---

**9.**– Sean $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ dos matrices. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

(i) Si $rango(A) = n$ entonces $m \geq n$.

(ii) Si $rango(A) = 1$ entonces $A$ tiene todas las filas nulas menos una.

(iii) Si $n = m$ entonces $rango(A^2) = rango(A)$.

(iv) Si $B$ es inversible, $rango(AB^t) = rango(A)$.

**(Examen final, julio 2021)**

---

**10.**– Sean $A, B, C \in M_{6\times 6}(\mathbb{R})$ matrices verificando $-ABA^t = CA + A$, $det(B) = 1$, $A$ inversible. Sabiendo que $C$ es una matriz diagonal con $c_{ii} = i$, calcular $det(A)$.

**(Examen final, enero 2016)**

---

**11.**– Calcular razonadamente los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{vmatrix}.$$

---

**12.**– Sabiendo que $det\begin{pmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{pmatrix} = 5$ calcular:

(i) $det\begin{pmatrix} 2-3a & b & 0 \\ 2 & b & 3 \\ 5 & 2b+5 & c+6 \end{pmatrix}$ (ii) $det\begin{pmatrix} b & 5 & 0 \\ 4 & c+2 & 2 \\ a+2 & 2a+1 & 2a \end{pmatrix}$.

**(Examen final, julio 2020)**

---

**13.**– Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$

(i) Hallar $AA^t$.

(ii) Calcular $det(AA^t)$ y $det(A)$.

(iii) Determinar el rango de $A$ en función de los valores de $a, b, c, d$.

**(Examen final, julio 2019)**

---

**14.**– Dado $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j+1 \\ \\ i \text{ si } i \neq j+1 \end{cases}$$

(i) Escribir la matriz $P_4$.

(ii) Hallar el determinante de $P_4$.

(iii) En general hallar $det(P_n)$.

**(Examen final, enero 2019)**

---

**15.**– Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $A_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$a_{ij} = i - 2j, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

(i) Escribir explícitamente la matriz $A_4$.

(ii) Calcular $det(A_4)$.

(iii) Para $n \geq 2$, calcular traza $A_n$, $det(A_n)$ y $rango(A_n)$.

**(Examen final, enero 2018)**

---

**16.**– Dado $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } j \leq n+1-i \\ \\ 0 \text{ si } j > n+1-i \end{cases}$$

(i) Escribir la matriz $P_5$ y hallar su determinante.

(ii) Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$ y $traza(P_n)$.

**(Examen final, enero 2021)**

---

**17.**– Dado $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} 2 \text{ si } i > j \\ \\ 1 \text{ si } i \leq j \end{cases}$$

(i) Escribir la matriz $P_4$.

(ii) Hallar el determinante de $P_4$.

(iii) Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$, $traza(P_n)$, $det(P_n^{2020})$.

**(Examen enero, 2020)**

---

**I.–** En el conjunto de las matrices $n \times n$ de elementos reales, demostrar que si $AA^T = \Omega$, entonces $A = \Omega$.

**(Primer parcial, febrero 2000)**

---

**II.–** Calcular las potencias $n$-ésimas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

---

**III.–** Para las siguientes familias de matrices no singulares de $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$, decidir si verifican alguna de las dos condiciones: (a) dada una matriz de la familia, su inversa también pertenece a la familia; (b) dadas dos matrices de la familia, su producto también pertenece a la familia.

(1) las matrices simétricas regulares,

(2) las matrices regulares que conmutan con una matriz dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$,

(3) las matrices ortogonales.

---

**IV.–** Sea $A$ una matriz columna de orden $n \times 1$ tal que $A^tA = 1$ y $B = Id_n - 2AA^t$. Demostrar que:

a) $B$ es simétrica

b) $B^{-1} = B^t$

**(Primer parcial, enero 2008)**

---

**V.–** Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $A_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ i \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

(i) Escribir explícitamente la matriz $A_4$.

(ii) Calcular $det(A_4)$.

(iii) Para $n \geq 2$, calcular traza $A_n$, $det(A_n)$ y $rango(A_n)$.

**(Examen final, julio 2018)**

---

**VI.**– Sea $X$ una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ y elementos reales. Sea $k$ un número par. Probar que si $X^k = -Id$, entonces $n$ es también un número par.

---

**VII.**– Dada la matriz $m \times n$ con $m, n > 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (m-1)n+1 & (m-1)n+2 & \dots & mn-1 & mn \end{pmatrix}$$

expresar $a_{ij}$ en función de $i$ y $j$, y calcular su rango.

**(Examen final, septiembre 2005)**

---

**VIII.**– Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix}$ y $det(A) = 3$, calcular $det(2C^{-1})$ donde $C = \begin{pmatrix} 2p & -a+u & 3u \\ 2q & -b+v & 3v \\ 2r & -c+w & 3w \end{pmatrix}$.

**(Examen final, enero 2014)**

---

**IX .**– Calcular el siguiente determimante:

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

¿ Para qué valores reales de $x_1, x_2, \dots, x_n$ se anula?.

**(Examen final, 2011)**

---

**X.**– Dados $n \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ se considera la matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a & a & \dots & a & a \\ a & a+b & a & \dots & a & a \\ a & a & a+b & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b & a \\ a & a & a & \dots & a & a+b \end{pmatrix}$$

(i) Hallar $det(A)$ en función de $a, b, n$.

(ii) Hallar $rango(A)$ en función de $a, b, n$.

**(Examen parcial, ocutbre 2014)**

---

**XI.**– Hallar el siguiente determinante para $n \geq 2$

$$A_n = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3 & \cdots & x_1+y_n \\ x_2+y_1 & x_2+y_2 & x_2+y_3 & \cdots & x_2+y_n \\ x_3+y_1 & x_3+y_2 & x_3+y_3 & \cdots & x_3+y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n+y_1 & x_n+y_2 & x_n+y_3 & \cdots & x_n+y_n \end{vmatrix}$$

**(Primer parcial, febrero 2003)**

---

**XII.**– Calcular en función de $x$ el siguiente determinante:

$$det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & 1 \\ x & x^2 & 1 & 1 \\ x^2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores reales de $x$ se anula?.

**(Examen final, 2011)**

---

**XIII.**– Dado $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } i \leq j \\ 1 \text{ si } i > j \end{cases}$$

(i) Escribir la matriz $P_4$ y hallar su determinante.

(ii) Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$, $traza(P_n)$ y $det(P_n^{-1})$.

**(Examen enero, 2022)**

---

**XIV.**– Sea $n > 2$ y $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, una matriz inversible. Sea $adj(A)$ su matriz adjunta. Probar que:

(a) $det(adj(A)) = det(A)^{n-1}$.

(b) $adj(adj(A)) = det(A)^{n-2} \cdot A$.

**(Primer parcial, enero 2010)**

---

**XV.**– Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

(i) Si $rango(A) = 1$ entonces $rango(AB) \leq 1$.

(ii) Si $rango(A) = rango(B)$ entonces $rango(AB) = rango(A)$.

(iii) $rango(A) + rango(B) = rango(A + B)$.

(iv) $rango(A) + rango(B) > rango(A + B)$.

**(Examen final, enero 2017)**

---