ÁLGEBRA LINEAL I **Práctica 1**

Conjuntos y aplicaciones (Curso 2024–2025)

1.– Dados los siguientes conjuntos:

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$$
$$B = \{x \in Z | x \geq 4\}$$
$$C = \{x \in Z || x| < 5\}$$
$$D = \{x \in N | x \text{ es impar}\}$$

Hallar:

i) $(A \cap B) \cup C$.

ii) $(Z - D) \cap C$.

iii) $(C \cup A) \cap B$.

iv) $(A \cup (Z - B)) \cap (C \cup D)$.

2.– Dados dos conjuntos X e Y se define la diferencia simétrica de ambos como:

$$X \Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

(i) Sea $A = \{a \in \mathbb{N} | 1 \leq a \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x^2 < 20\}$, $C = \{1, 2, 4\}$. Calcular $(A \cup B)\Delta C$, $A\Delta(B \cap C)$ y $C\Delta B$.

(ii) Razonar si es cierto o no en general que:

$$(X \cup Y)\Delta Z = (X\Delta Z) \cup (Y\Delta Z)$$

(Examen parcial, Octubre 2015)

3.– Sean A, B, C tres conjuntos. Razona la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

(i) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

(ii) Si $A \subset B$ entonces $A \cap C = B \cap C$.

(iii) Si $A \cap C = C$ entonces $C \subset A$.

(iv) Si $A \cup B = A \cap B$ entonces $A = B$.

(v) Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $(A \cup C) \cap (B \cap C) = \emptyset$.

(vi) Si $A \cap B = B \cap C = \emptyset$ entonces $A \cap C = \emptyset$.

(Examen final, julio 2015 y prueba Octubre 2018)

4.– Sea $f : X \to Y$ una aplicación, y sean A, B dos subconjuntos de X. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas en general y para las que resulten no serlo, si son verdaderas bajo la hipótesis suplementaria de que f sea inyectiva o sobreyectiva.

(a) $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

(c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

(d) $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$

(e) $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$

(f) $Y \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$

5.– Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = +\sqrt{x}$. ¿Es una aplicación inversa de la otra? Razonar la respuesta.

6.– Dadas las siguientes aplicaciones estudiar si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Calcular también las aplicaciones inversas de las que resulten ser biyectivas.

(a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x + 1$

(a') $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 2]$, $x \mapsto \cos x + 1$

(a") $f_1 : [0, \pi] \longrightarrow [0, 2]$, $x \mapsto \cos x + 1$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y$ si $y^2 = x$

(b') $f_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto y$ si $y^2 = x$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{tg} x$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^9$

(e) $f_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n!$

(f) $f_6 : \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $x \mapsto \dfrac{2x - 4}{x - 3}$

(g) $f_7 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$

(h) $f_8 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x - y, x + y)$

(i) $f_9 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 1/x)$

7.– Sean A, B, C, D conjuntos, f una aplicación de A en B, g una aplicación de B en C, h una aplicación de C en D. Probar que si $g \circ f$ y $h \circ g$ son biyectivas, entonces de hecho f, g y h son biyectivas.

8.– Sea $h : X \longrightarrow X$ una aplicación tal que existe un $n \in \mathbb{N}$ con $h^n = i_X$. Demostrar que h es biyectiva. (Notas: $h^n = h \circ \overset{n}{\ldots} \circ h$; i_X es la aplicación identidad de X).

9.– Sea $f : A \to B$ una aplicación. Demostrar que

(a) f es inyectiva si y sólo si existe una aplicación $g : B \to A$ tal que $g \circ f = i_A$.

(b) f es sobreyectiva si y sólo si existe una aplicación $h : B \to A$ tal que $f \circ h = i_B$.

10.– Sean X e Y conjuntos y $f : X \to Y$ una aplicación. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) f es inyectiva.

(b) Para cualesquiera subconjuntos A, B de X tales que $A \cap B = \emptyset$, se cumple $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

(Primer parcial, febrero 2003)
