ÁLGEBRA LINEAL I — Soluciones a la Práctica 6

Aplicaciones lineales (Curso 2023–2024)

1.– *De las siguientes aplicaciones definidas entre espacios vectoriales reales, determinar cuáles son homomorfismos, monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos. Obtener también, con respecto a bases que se definirán, la expresión matricial, base y ecuaciones del núcleo y la imagen de todos los homomorfismos.*

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=3x+2$

NO ES HOMOMORFISMO porque no lleva el neutro en el neutro, es decir, $f(0)=2\neq 0$.

(b) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad g(x,y)=(x,\ y,\ x+y)$

SI ES HOMOMORFISMO. Veámoslo. Sean $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ y $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$. Hay que verificar que $g(\lambda(x,y)+\mu(x',y'))=\lambda g(x,y)+\mu g(x',y')$:

$$\begin{aligned} g(\lambda(x,y)+\mu(x',y')) &= g(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y')=(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y')\\ &=\lambda(x,y,x+y)+\mu(x',y',x'+y')=\lambda g(x,y)+\mu g(x',y') \end{aligned}$$

En las bases canónicas $\{(1,0),(0,1)\}$ en $\mathbb{R}^2$ y $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ en $\mathbb{R}^3$, la expresión matricial es:

$$g(x,y)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

El núcleo son los vectores que van al cero. Es decir los (x,y) tales que $\bar{0}=g(x,y)=(x,y,x+y)$. Por tanto el núcleo es el espacio $\{\bar{0}\}$ y la aplicación ES un MONOMORFISMO.

La imagen son los vectores $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ que verfican $z=x+y$. NO es un EPIMORFISMO, porque la dimensión de la imagen es 2 (menor que la dimensión 3 del espacio final).

NO es ISOMORFISMO, por no ser epimorfismo.

(c) $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad h(x,y)=(xy,\ x-2y)$

NO es HOMORFISMO. No verifica que $h((x,y)+(x',y'))=h(x,y)+h(x',y')$. Por ejemplo:

$$h((1,1)+(-1,-1))=h(0,0)=(0,0)$$

y sin embargo

$$h(1,1)+h(-1,-1)=(1,-1)+(1,1)=(2,0)\neq(0,0)$$

(d) $u:\mathcal{P}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{P}_2(\mathbb{R}),\quad u(p(x))=p'(x)$

SI es HOMOMORFISMO. Sean $p(x),q(x)\in\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Por las propiedades de la derivación se tiene:

$$u(\lambda p(x)+\mu q(x))=(\lambda p(x)+\mu q(x))'=\lambda p'(x)+\mu q'(x)=\lambda u(p(x))+\mu u(q(x))$$

Consideramos en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ la base canónica $\{1,x,x^2,x^3\}$ y en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ la base canónica $\{1,x,x^2\}$. Si $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, su derivada es $p'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2$. Por tanto en las bases canónicas el homomorfismo se expresa matricialmente como:

$$u(p(x))=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}.$$

El núcleo son aquellos polinomios con derivada cero, es decir, las constantes $p(x) = a_0$. Por tanto sus ecuaciones son:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

NO es un MONOMORFISMO porque hay polinomios no nulos con derivada nula, es decir, el núcleo es distinto de $\{\bar{0}\}$.

La imagen es todo el espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, porque todo polinomio de grado menor o igual que 2 es derivada de uno de grado menor o igual que 3. Dado $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ basta tomar $p(x) = b_0x + (b_1/2)x^2 + (b^2/3)x^3$, y $u(p(x)) = q(x)$. Por tanto la apliación ES un EPIMORFISMO.

Finalmente NO es un ISOMORFISMO, porque no es un monomorfismo.

(e) $v : \mathcal{M}_{2\times 3} \to \mathcal{S}_3, \quad v\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a-b & c \\ a-b & d & e+f \\ c & e+f & e-f \end{pmatrix}$

(*Notaciones:* $\mathcal{M}_{m\times n}$ *es el espacio vectorial de las matrices* $m \times n$ *con elementos reales;* $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$*, el espacio de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que* n*;* $\mathcal{S}_n$*, el espacio de las matrices simétricas* $n \times n$ *con elementos reales).*

Veamos que es un homomorfismo. Sean $A, A' \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ con:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$$

y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tenemos que comprobar que

$$v(\lambda A + \mu B) = \lambda v(A) + \lambda v(B)$$

Pero:

$$\begin{aligned}
v(\lambda A + \mu B) &= v(\lambda \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix}) \\
&= v(\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a' & \mu b' & \mu c' \\ \mu d' & \mu e' & \mu f' \end{pmatrix}) \\
&= v(\begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' & \lambda b + \mu b' & \lambda c + \mu c' \\ \lambda d + \mu d' & \lambda e + \mu e' & \lambda f + \mu f' \end{pmatrix}) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' - \lambda b - \mu b' & \lambda a + \mu a' - \lambda b - \mu b' & \lambda c + \mu c' \\ \lambda a + \mu a' - \lambda b - \mu b' & \lambda d + \mu d' & \lambda e + \mu e' + \lambda f + \mu f' \\ \lambda c + \mu c' & \lambda e + \mu e' + \lambda f + \mu f' & \lambda e + \mu e' - \lambda f - \mu f' \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} a+b & a-b & c \\ a-b & d & e+f \\ c & e+f & e-f \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a'+b' & a'-b' & c' \\ a'-b' & d' & e'+f' \\ c' & e'+f' & e'-f' \end{pmatrix} \\
&= \lambda v(A) + \mu v(B)
\end{aligned}$$

Consideramos las bases canónicas B y B' en $\mathcal{M}_{2\times 3}$ y $\mathcal{S}_3$ respectivamente:

$$\begin{aligned}
B &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \{e_1, \ldots, e_6\}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
B' &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \{E_1, \ldots, E_6\}
\end{aligned}$$

Veamos cual es la matriz de la aplciación con respecto a estas bases. Para ello calculamos las imágenes de cada e_i y las escribimos en la base B':

$$\begin{aligned} v(e_1) &= E_1 + E_2; \\ v(e_2) &= E_1 - E_2; \\ v(e_3) &= E_3; \\ v(e_4) &= E_4; \\ v(e_5) &= E_5 + E_6; \\ v(e_6) &= E_5 - E_6; \end{aligned}$$

Por tanto la matriz de v con respecto a las bases B_1 y B_2 es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Recordemos que esto significa que si denotamos a las coordenadas en la base B por $(x^1, \ldots, x^6)$ y las coordenadas de su imagen en la base B' por $(y^1, \ldots, y^6)$, estas se calculan como:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \\ y^5 \\ y^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{pmatrix}$$

El núcleo de la aplicación corresponde a aquellos vectores cuya imagen es cero, es decir, a la solución del sistema:

$$A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{pmatrix} = \bar{0}$$

Dado que la matriz asociada al sistema es precisamente la matriz A de la aplicación v y esta es no singular, el sistema es determinado con única solución la trivial. Por tanto el núcleo del homomorfismo es el subespacio $\{\bar{0}\}$ y ES un MONOMORFISMO.

Además utilizando las fórmulas de la dimensión vemos que

$$dim(Im\, v) = dim(\mathcal{M}_{2\times 3}) - dim(Ker\, v) = 6.$$

Pero $\mathcal{S}_3$ también tiene dimensión 6. Deducimos que la aplicación ES un EPIMORFISMO.

Finalmente por ser monomorfismo y epimorfismo, ES un ISOMORFISMO de espacios vectoriales.

Nota: Como el núcleo es $\{\bar{0}\}$ no tiene sentido dar sus ecuaciones. En todo caso sus ecuaciones cartesianas serían obviamente $x^1 = x^2 = x^3 = x^4 = x^5 = x^6 = 0$. Así mismo como la imagen es todo el espacio $\mathcal{S}_3$, una base de ella es cualquier base de $\mathcal{S}_3$; por ejemplo, la base B'.)

2.– *Sea la aplicación lineal:*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y,z) = (x+y+z, x-y)$$

(i) *Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.*

Trasladando coeficientes la matriz asociada en las bases canónica es:

$$F_{C'C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $C' = \{(1,0),(0,1)\}$.

(ii) *Probar que $B = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $B' = \{(1,2),(1,0)\}$ son bases respectivamente de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.*

Para que los vectores formen base basta que el número de vectores coincida con la dimensión del espacio y que el rango de la matriz de coordenadas sea el máximo posible.

En el primer caso tenemos $3 = dim(\mathbb{R}^3)$ vectores y el rango es:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

y en el segundo $2 = dim(\mathbb{R}^2)$ y:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

(iii) *Hallar las ecuaciones implícitas de $ker(f)$ respecto de la base B.*

Hallamos la matriz asociada $F_{C'B}$ para poder utilizarla para calcular el núcleo y obtener los resultados directamente en la base B:

$$F_{C'B} = F_{C'C}M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El núcleo está entonces definido por las ecuaciónes:

$$F_{C'B} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x' + 2y' + z' = 0,\ x' + z' = 0.$$

que son claramente independientes por no ser proporcionales.

(iv) *Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases B y B'.*

Aplicamos la fórmula de cambio de base:

$$F_{B'B} = M_{B'C'}F_{C'B} = M_{C'B'}^{-1}F_{C'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

4.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se consideran los subespacios que tienen las siguientes ecuaciones implícitas en la base canónica:*

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \qquad \begin{cases} x_1 & = & 2x_2 \\ x_2 & = & -x_3 \end{cases}$$

Determinar la matriz de la proyección sobre el primero paralelamente al segundo, y viceversa.

Calculamos una base del primer subespacio (al que llamaremos U). Para ello hallamos primero las paramétricas. Dado que está definida por una función implícita el número de parámetros es $3 - 1 = 2$:

$$x_1 = -2x_2 - x_3$$

Obtenemos:

$$x_1 = -2a - b, \quad x_2 = a, \quad x_3 = b.$$

Y por tanto $U = \mathcal{L}\{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

Calculamos una base del primer subespacio (al que llamaremos V). Para ello hallamos primero las paramétricas. Dado que está definida por una función implícita el número de parámetros es $3 - 2 = 1$:

$$x_1 = 2x_2 \quad x_3 = -x_2.$$

Obtenemos:

$$x_1 = 2a, \quad x_2 = a, \quad x_3 = -a.$$

Y por tanto $V = \mathcal{L}\{(2, 1, -1)\}$.

Formamos una base uniendo las de cada subespacio:

$$B = \{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1), (2, 1, -1)\}$$

En tal base la matriz de la proyección sobre U paralelamente a V es:

$$PU_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente la cambiamos a la base canónica:

$$PU_C = M_{CB} PU_B M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $PU_C + PV_C = Id$ la matriz del la protección sobre V paralelamente a U es:

$$PV_C = Id - PU_C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6.– *Sea* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que* 2 *con coeficientes reales. Se considera la aplicación:*

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \quad f(p(x)) = x \cdot p'(x)$$

(i) *Demostrar que* f *es una aplicación lineal.*

Tenemos que comprobar que para cualquier par de polinomios $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$f(\alpha p(x) + \beta q(x)) = \alpha f(p(x)) + \beta f(q(x)).$$

Pero:

$$f(\alpha p(x) + \beta q(x)) = x(\alpha p(x) + \beta q(x))' = x(\alpha p'(x) + \beta q'(x)) = \alpha x p'(x) + \beta x q'(x) = \alpha f(p(x)) + \beta f(q(x)).$$

(ii) *Calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica $C = \{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

La matriz F_C se calcula tomando los vectores de la base canónica, calculando sus imágenes y expresándolas en coordenadas en la base canónica. Estas coordenadas forman las columnas de la matriz buscada.

$$\begin{aligned} f(1) =& x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = (0,0,0)_C \\ f(x) =& x \cdot 1 = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 = (0,1,0)_C \\ f(x^2) =& x \cdot 2x = 2x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 2 \cdot x^2 = (0,0,2)_C \end{aligned}$$

Por tanto la matriz asociada es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(iii) *Probar que los vectores $B = \{1, x-1, (x-1)^2\}$ forman una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Dado que son tres vectores y $dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) = 3$ para ver que son base basta comprobar que son linealmente independientes; equivalentemente que la matriz formada por sus coordenadas en cualquier base (por ejemplo la canónica) tiene rango 3:

$$\begin{aligned} &1 \equiv (1,0,0)_C \\ &x - 1 \equiv (-1,1,0)_C \\ &(x-1)^2 = 1 - 2x + x^2 = (1,-2,1)_C \end{aligned}$$

Comprobamos el rango de la matriz de coordenadas:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \text{ ya está escalonada}$$

(iv) *Calcular la matriz asociada a f respecto de la base B.*

Aplicamos la fórmula de cambio de base:

$$F_B = M_{BC} F C M_{CB} = M_{CB}^{-1} F_B M_{CB}, \qquad M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde M_{CB} está formada por las coordenadas de los vectores de B respecto de la base canónica puestas en columna.

Operando:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(v) *Calcular las ecuaciones paramétricas de $Im(f)$ en la base canónica y las ecuaciones implícitas del núcleo en la base B.*

Para calcular las ecuaciones de $Im(f)$ en la base canónica usamos la matriz asociada F_C. La imagen está generada por sus columnas:

$$Im(f) = \mathcal{L}\{(0,0,0),(0,1,0),(0,0,2)\} = \mathcal{L}\{(0,1,0),(0,0,2)\}$$

Los dos vectores son claramente independientes (no son proporcionales). Las paramétricas se obtienen tomando combinaciones lineales de ambos:

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = \alpha, \quad a_2 = 2\beta.$$

Para el núcleo, dado que lo piden respecto de la base B, lo calculamos con la matriz F_B. Está formado por los vectores (polinomios) cuya imagen es nula; equivalentemente los vectores cuyas coordenadas en la base B multiplicadas por F_B dan cero:

$$F_B \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando quedan las ecuaciones:

$$b_1 = 0, \quad b_1 + 2b_2 = 0, \quad 2b_2 = 0.$$

Eliminando las dependientes:

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0.$$

7.– *De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se sabe que:*

$$f(1,-2,1) = Id, \quad ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y - z = 0\}$$

Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

La base canónica de de $\mathbb{R}^3$ es $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

La base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es $C' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de forma que una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene coordenadas $(a,b,c,d)_{C'}$ en dicha base.

Nos piden la matriz $F_{C'C}$, pero para ello necesitaríamos conocer la imagen de los elementos de C. Como no tenemos estos datos directamente del enunciado, buscaremos una base B de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ sobre la cual hay información. Calcularemos $F_{C'B}$ y luego haremos un cambio de base.

El primer vector del conocemos su imagen es $(1,-2,1)$.

Además nos dan el núcleo de la aplicación:

$$ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y - z = 0\} = \{(x,y,y) \in \mathbb{R}^3\} = \mathcal{L}\{(1,0,0)_C, (0,1,1)_C\}$$

Consideramos la base formada por todos ellos $B = \{(1,-2,1),(1,0,0)_C,(0,1,1)_C\}$. Es base porque tiene tantos vectores como la dimensión de $\mathbb{R}^3$ y además son independientes ya que el rango de la matriz de coordenadas es el máximo posible:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3.$$

Sabemos que:

$f(1,-2,1) = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,0,0,1)_{C'}$.

Y dado que los vectores del núcelo tienen imagen nula:

$f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0,0)_{C'}$.

$f(0,1,1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=(0,0,0,0)_{C'}$.

La matriz $F_{C'B}$ es aquella cuyas columnas son las coordenadas de las imágenes de B:

$$F_{C'B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente hacemos el cambio de base:

$$F_{C'C}=F_{C'B}M_{BC}=F_{C'B}M_{CB}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

8.– *Dada la aplicación:*

$$f:\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2,\quad f(A)=(traza(A),traza(A+A^t))$$

(i) *Probar que f es lineal.*

Dadas $A,B\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $s,t\in\mathbb{R}$ tenemos que comprobar que $f(sA+tB)=sf(A)+tf(B)$. Por simplificar notamos que

$$traza(A+A^t)=traza(A)+traza(A^t)=traza(A)+traza(A)=2traza(A)$$

y por tanto en realidad $f(A)=(tr(A),2tr(A))$. Pero:

$$f(sA+tB)=(tr(sA+tB),2tr(sA+tB))=(s\cdot tr(A)+t\cdot tr(B),2s\cdot tr(A)+2t\cdot tr(B))$$
$$sf(A)+tf(B)=s(tr(A),2tr(A))+t(tr(B),2tr(B))=(s\cdot tr(A)+t\cdot tr(B),2s\cdot tr(A)+2t\cdot tr(B))$$

(ii) *Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^2$.*

La base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es:

$$C=\left\{E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},E_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

y la de $\mathbb{R}^2$, $C_2=\{(1,0),(0,1)\}$.

Queremos calcular F_{C_2C}. Para ello tomamos los vectores de C, hallamos sus imágenes y los expresamos en la base de llegada. Las coordenadas obtenidas puestas en columna forman la matriz pedida:

$$f(E_1)=(traza(E_1),2traza(E_1))=(1,2)=(1,2)_C$$
$$f(E_2)=(traza(E_2),2traza(E_2))=(0,0)=(0,0)_C$$
$$f(E_3)=(traza(E_3),2traza(E_3))=(0,0)=(0,0)_C$$
$$f(E_4)=(traza(E_4),2traza(E_4))=(1,2)=(1,2)_C$$

Obtenemos:

$$F_{C_2C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Usando la matriz asociada calculada en el apartado anterior, hallar $f(Id)$.*

Tenemos que:

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,0,0,1)_C$$

Entonces:

$$f(Id) = F_{C_2C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es decir:

$$f(Id) = (2,4)_C = (2,4).$$

(iv) *Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de $ker(f)$ respecto de la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*

El núcleo está formada por los vectores cuya imagen es nula. Equivalentemente por las matrices de coordenadas $(x,y,z,t)_C$ que cumplen:

$$F_{C_2C} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente:

$$x + t = 0, \quad 2x + 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + t = 0.$$

Esa es la ecuación implícita del núcleo. Para las paramétrias resolvemos en función de $dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) - 1 = 4 - 1 = 3$ parámetros. Queda:

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma, \quad t = -\alpha.$$

(v) *Demostrar que los siguientes vectores forman una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$,*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dado que B tiene tantos vectores como $dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$, para ver que es base es suficiente comprobar que sus vectores son independientes; equivalentemente que la matriz que forman sus coordenadas tiene rango 4:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

(vi) *Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases B de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ y $B' = \{(0,1),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.*

Aplicamos la fórmula de cambio de base:

$$F_{B'B} = M_{B'C_2} F_{C_2C} M_{CB} = M_{C_2B'}^{-1} F_{C_2C} M_{CB}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$M_{C_2B'}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$F_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9.– *Calcular la matriz asociada en la base canónica de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ que verifique: $f\circ f=0$, $dim(Im(f))=2$, $(1,0,0,2)\in Im(f)$, $(0,1,1,0)\in ker(f)$.*

Como $f\circ f=0$ entonces $Im(f)\subset Ker(f)$ ya que si $\vec{u}\in Im(f)$ entonces $\vec{u}=f(\vec{v})$ y:

$$f(\vec{u})=f(f(\vec{v}))=(f\circ f)(\vec{v})=\vec{0}\quad\Rightarrow\quad \vec{u}\in \ker(f).$$

Además por la fórmula de las dimensiones $dim(Im(f))+dim(ker(f))=4$. Como $dim(Im(f))=2$ entonces $dim(ker(f))=4-2=2$; como además $im(f)\subset ker(f)$ deducimos que $im(f)=ker(f)$.

Entonces:

-$(1,0,0,2)\in Im(f)=ker(f)\quad\Rightarrow\quad f(1,0,0,2)=(0,0,0,0)$.

-$(0,1,1,0)\in ker(f)\quad\Rightarrow\quad f(0,1,1,0)=(0,0,0,0)$

Por otro lado dado que núcelo e imagen coinciden, $(1,0,0,2),(0,1,1,0)\in Im(f)$. Escogemos un par de vectores que completen los dos primeros a una base y los llevaremos precisamente a esos generadores de la base. Es decir tomamos:

$$B=\{(1,0,0,2),(0,1,1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

y definimos:

$$f(1,0,0,2)=(0,0,0,0),\quad f(0,1,1,0)=(0,0,0,0),\quad f(0,0,1,0)=(1,0,0,2),\quad f(0,0,0,1)=(0,1,1,0).$$

Por tanto:

$$F_{CB}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&2&0\end{pmatrix}$$

y finalmente:

$$F_{CC}=F_{CB}M_{BC}=F_{CB}M_{CB}^{-1}$$

donde

$$M_{CB}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$F_{CB}=\begin{pmatrix}0&-1&1&0\\-2&0&0&1\\-2&0&0&1\\0&-2&2&0\end{pmatrix}$$

12.– *En el espacio de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2 se consideran los subespacios:*

$$U=\{p(x)\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R})|p(1)=0\},\qquad V=\{p(x)\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R})|p'(x)=0\}$$

(i) *Probar que U y V son suplementarios.*

Para ver que son suplementarios basta verificar que $dim(U)+dim(V)=dim(\mathcal{P}_2)=3$ y $dim(U\cap V)=0$.

Para hacer esto primero expresamos los subespacios mediante ecuaciones en la base canónica $C=\{1,x,x^2\}$.

Observamos que si $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ entonces:

$$p(1)=0\iff a_0+a_1+a_2=0.$$

Por tanto:

$$U = \{(a_0, a_1, a_2)_C \in \mathcal{P}_2 | a_0 + a_+ a_1 = 0\} = \mathcal{L}\{(1, 0, -1)_C, (0, 1, -1)_C\}$$

Así $dim(U) = 3 - 1 = 2$.

Por otra parte las únicas funciones de derivada nula son las constantes. Por tanto:

$$V = \mathcal{L}\{1\} = \mathcal{L}\{(1, 0, 0)_C\} = \{(a_0, a_1, a_2)_C \in \mathcal{P}_2 | a_1 = a_2 = 0\}.$$

Así $dim(V) = 3 - 2 = 1$ y entonces $dim(U) + dim(V) = 3$.

Finalmente $U \cap V$ tiene por ecuaciones implícitas las de uno y otro subespacio unidas:

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0.$$

Como las tres son independientes $dim(U \cap V) = 3 - 3 = 0$.

(ii) *Calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección sobre U paralelamente a V.*

Tomamos una base formada por los generadores de uno y otro subespacio:

$$B = \{\underbrace{(1, 0, 0)_C}_{V}, \underbrace{(1, 0, -1)_C, (0, 1, -1)_C}_{U}\}$$

En tal base la matriz de la proyección sobre U paralelamente a V es:

$$P_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente hacemos el cambio de base a la canónica:

$$P_C = M_{CB} P_B M_{BC} = M_{CB} P_B M_{CB}^{-1}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$P_C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Hallar un polinomio $p(x)$ sabiendo que su proyección sobre U paralelamente a V es $(x-1)^2$ y que $p(0) = 0$.*

Tenemos que:

$$p(x) = \underbrace{(x-1)^2}_{U} + \underbrace{q(x)}_{V}$$

Como $q(x) \in V$ sabemos que $q(x) = k$; usando que $p(0) = 0$:

$$0 = p(0) = (0-1)^2 + q(0) = 1 + k$$

De donde $k = -1$ y:

$$p(x) = (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x.$$

13.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se sabe que la aplicación proyección sobre un subespacio* U *paralelamente a otro* V *es:*

$$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad p(x,y,z) = (-y+z, y, z)$$

(i) *Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de* U *y* V *respecto de la base canónica.*

En una aplicación proyección sabemos que el núcleo es el subespacio paralelamente al cuál se proyecta y la imagen el subespacio sobre el cuál se proyecta.

Entonces $U = Im(f)$. La imagen está generada por las columnas de la matriz asociada:

$$P_C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$U = \mathcal{L}\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$$

Escalonamos la matriz de coordenadas para ver que son independientes:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{1}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Queda:

$$U = \mathcal{L}\{(1,-1,0),(0,1,1)\}$$

Las paramétricas de U son:

$$x = a, \qquad y = -a+b, \qquad z = b.$$

Y eliminando parámetros la implícita queda:

$$x + y - z = 0.$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} V = ker(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | P_C(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -y+z=0,\ y=0,\ z=0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y=0,\ z=0\}. \end{aligned}$$

Las implícitas de V son (claramente independientes)

$$y = 0, \qquad z = 0.$$

y de ahí las paramétricas:

$$x = \lambda, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

(ii) *Hallar la proyección del vector* $\vec{w} = (2,3,1)$ *sobre* V *paralelamente a* U.

Recordemos que dado un vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ se descompone como:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \text{ con } \vec{u} \in U, \quad \vec{v} \in V,$$

siendo $\vec{u}$ la proyección de $\vec{w}$ sobre U paralelamente a V y $\vec{v}$ la proyección sobre V paralelamente a U.

Usando la matriz dada en el apartado anterior podemos hallar la proyección de $\vec{w} = (2,3,1)$ sobre U paralelamente a V:

$$\vec{u} = p(2,3,1) = (-3+1,3,1) = (-2,3,1).$$

Por tanto:

$$\vec{v} = \vec{w} - \vec{u} = (2,3,1) - (-2,3,1) = (4,0,0).$$

14.– *Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *En un espacio vectorial de dimensión 10, un conjunto de 11 vectores siempre es un sistema generador.*

FALSO. Por ejemplo en $\mathbb{R}^{10}$ basta tomar los vectores $\vec{v}_i = (i,i,i,i,i,i,i,i,i,i)$ para $i = 1,2,\ldots,11$. Todos ellos son múltiplos de $\vec{v}_1$ y por tanto generan un subespacio de dimensión 1. No generan todo $\mathbb{R}^{10}$.

(ii) *Una aplicación lineal lleva vectores linealmente dependientes en vectores linealmente dependientes.*

VERDADERO. Sea $f : V \longrightarrow W$ diagonal y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ un sistema de vectores dependientes de manera que el primero es combinación lineal de los demás:

$$\vec{u}_1 = a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_n\vec{u}_n$$

Aplicando f y usando que es lineal:

$$f(\vec{u}_1) = f(a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_n\vec{u}_n) = a_2 f(\vec{u}_2) + \ldots + a_n f(\vec{u}_n)$$

y por tanto los vectores $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ son linealmente dependientes porque un vector es combinación lineal de los demás.

(iii) *Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ puede ser inyectiva.*

FALSO. Por la fórmula de las dimensiones:

$$dim(ker(f)) = dim(\mathbb{R}^5) - dim(Im(f)) = 5 - dim(Im(f)) \geq 5 - dim(\mathbb{R}^4) = 1.$$

Si el núcleo no es cero, entonces no es inyectiva.

(iv) *Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ siempre es sobreyectiva.*

FALSO. Basta tomar como ejemplo la aplicación nula: $f(x,y,z,t,r) = (0,0,0,0)$ que es lineal y su imagen es $\{(0,0,0,0)\} \neq \mathbb{R}^4$ por lo que NO es sobreyectiva.

15.– *De un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se sabe que $Im(f) = ker(f)$ y $f(1,0) = (1,1)$. Hallar $f(2,3)$*

Dado que $f(1,0) = (1,1)$ entonces $(1,1) \in Im(f) = ker(f)$. Pero entonces $f(1,1) = (0,0)$.

Por tanto sabemos como funciona la aplicación lineal sobre una base $B = \{(1,0),(1,1)\}$ (es base porque son dos vectores independientes -no proporcionales- en un espacio de dimensión dos). Entonces está totalmente determinada.

Dos posibles formas de concluir:

Método I. Por linealidad:

$$f(2,3) = f((3,3) - (1,0)) = f(3,3) - f(1,0) = 3f(1,1) - f(1,0) = 3(0,0) - (1,1) = (-1,-1).$$

Método II. Dado que $f(1,0) = (1,1)$ y $f(1,1) = (0,0)$ la matriz asociada a f en la base B en el espacio de partida y C en el de llegada es:

$$F_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hacemos el cambio de base:

$$F_{CC} = F_{CB}M_{BC} = F_{CB}M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Y ahora para hallar $f(2,3)$ basta hacer el producto:

$$F_{CC}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

16.– *Sea la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y, x+y)$. *¿Puede ser* f *la aplicación proyección sobre un subespacio paralelamente a otro?. Razona la respuesta.*

Una proyección tiene como autovalores únicamente al 1 o al 0, porque los vectores del espacio sobre el cuál proyectamos quedan fijos y los del espacio paralelamente al cuál proyectamos van al cero.

La matriz asociada en la base canónica de este endomorfismo es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus autovalores como raíces del polinomio característico:

$$|F_c - \lambda Id| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Vemos que $\lambda = 2$ es autovalor y por tanto NO puede ser una proyección.

I.– *Sea f una aplicación lineal del espacio vectorial real S_2 de las matrices simétricas de dimensión 2, en el espacio vectorial real $M_{2\times 2}$ de las matrices cuadradas de dimensión 2, siendo:*

$$f\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix},\qquad f\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\-2&1\end{pmatrix},\qquad f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\-3&3\end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) *Matriz de f, indicando las bases en las que está definida.*

La forma más rapida de escribir la matriz de f es utilizar los vectores sobre los cuales está definida:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$$

Estos forman una base por que sus coordenadas en la base canónica de S_2 son $(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$ y estos tres vectores son independientes. Por tanto si consideramos la base B en S_2 y la base canónica C_1 en $M_{2\times 2}$, la matriz de f respecto a estas bases es:

$$F_{C_1B}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&2\\1&-2&-3\\1&1&3\end{pmatrix}$$

Si quisiéramos la matriz en función de las bases canónicas en ambos espacios, bastaría multiplicar por la inversa de la matriz que transforma coordenadas en bases B a coordenadas en la base canónica de S_2. Es decir, quedaría:

$$F_{C_1C}=F_{C_1B}M_{CB}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&2\\1&-2&-3\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&3\\2&-1&-1\\-3&1&3\\3&-2&0\end{pmatrix}$$

(b) *Ecuaciones paramétricas de la imagen de f, en la base* $B_1=\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right\}$.

La imagen está generada por las matrices cuyas coordenadas en la base canónica son $(2,0,1,1),(-1,1,-2,1),(0,2,-3,3)$. Primero veamos si estos vectores son independientes. Los colocamos matricialmente y calculamos el rango haciendo reducción por filas:

$$\begin{pmatrix}2&0&1&1\\-1&1&-2&1\\0&2&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{H_{21}(2)}\begin{pmatrix}0&2&-3&-3\\-1&1&-2&1\\0&2&-3&3\end{pmatrix}$$

Vemos que el rango es 2 y la imagen está generada por los vectores cuyas coordenadas en la base canónica son $(-1,1,-2,1),(0,2,-3,3)$.

Por otra parte la matriz para pasar de coordenadas en la base que nos dan a la base canónica es:

$$M_{C_1B_1}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

Por tanto las coordenadas de los vectores que generan la imagen expresadas en la base que nos dan serán:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dado que la dimensión de la imagen es 2, dichos vectores forman una base de la imagen. Las ecuaciones paramétricas en la base que nos dan serán:

$$\begin{aligned} y^1 &= -\lambda - \mu \\ y^2 &= \mu \\ y^3 &= -3\lambda/2 - 3\mu \\ y^4 &= -\lambda/2 \end{aligned}$$

(c) *Ecuaciones cartesianas del núcleo de f, en la base* $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Las ecuaciones del núcleo en la base canónica satisfacen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dado que la dimensión de la imagen es 2 y la dimensión de S_2 es 3, el núcleo tiene dimensión 1, luego está definido por dos ecuaciones independientes. Basta tomar en la matriz anterior dos filas independientes:

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x^3 &= 0 \\ 2x^1 - x^2 - x^3 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora para expresarla en la base que nos dan tenemos en cuenta que si (x'^1, x'^2, x'^3) son coordenadas en dicha base se tiene:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}$$

y por tanto las ecuaciones que definen al núcleo en la base dada son:

$$\begin{aligned} 4x'^1 - x'^2 - x'^3 &= 0 \\ -x'^2 + 3x'^3 &= 0 \end{aligned}$$

(d) *Encontrar un subespacio de S_2 y otro de $M_{2\times 2}$, ambos de dimensión 2, entre los que la restricción de f a ellos sea biyectiva.*

Basta tomar un subespacio de S_2 de dimensión 2 que no interseque al núcleo. Dado que las dos primeras columnas de la matriz de f con respecto a la base B_1 de S_2 y la base canónica de $M_{2\times 2}$ son independientes podemos tomar en S_2 el espacio generado por:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La imagen es el subespacio generado por las matrices:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(Primer parcial, enero de 2002)

II.– *Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3. Sean U y W dos subespacios suplementarios de V de dimensiones 2 y 1 respectivamente. Llamamos $f : V \longrightarrow V$ a la aplicación proyección sobre U paralelamente a W. Sea B una base de V. Probar que la matriz asociada a f respecto a la base B cumple:*

$$F_{BB}{}^n = F_{BB} \text{ para cualquier } n \geq 1.$$

Método I: La matriz $F_{BB}{}^n$ es la matriz asociada a la aplicación lineal:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ veces}}.$$

respecto a la base B.

Dado un vector $\bar{v} \in V$ cualquiera sabemos que se descompone de manera única como:

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \text{ con } \bar{u} \in U, \quad \bar{w} \in W.$$

Y teniendo en cuenta que f es la proyección sobre U paralelamente a W:

$$\begin{aligned} &f(\bar{v}) = \bar{u}. \\ &f^2(\bar{v}) = f(f(\bar{v})) = f(\bar{u}) = \bar{u}. \\ &f^3(\bar{v}) = f(f^2(\bar{v})) = f(\bar{u}) = \bar{u}. \end{aligned}$$

y en general, razonando por inducción, si $n \geq 2$

$$f^n(v) = f(f^{n-1}(\bar{v})) = f(\bar{u}) = \bar{u} = f(\bar{v}).$$

Vemos que $f^n = f$ y por tanto $F_{BB}{}^n = F_{BB}$.

Método II: Escogemos una base de U y otra de W:

$$\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}, \{\bar{w}_1\}.$$

Por ser U y W suplementarios, todos estos vectores forman una base de V:

$$C = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{w}_1\}.$$

La matriz de f con respecto a C es:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $F_{CC}^n = F_{CC}$.

Ahora con respecto a cualquier otra base se tiene:

$$F_{BB} = M_{BC} F_{CC} M_{BC}{}^{-1} \quad \Rightarrow \quad F_{BB}{}^n = M_{BC} F_{CC}{}^n M_{BC}{}^{-1} = M_{BC} F_{CC} M_{BC}{}^{-1} = F_{BB}.$$

III.– *Sea V el espacio vectorial de los polinomios reales de grados menor o igual que 2; sean:*

$$p(x) = 1 + x + x^2;\ q(x) = 1 + 2x^2;\ r(x) = x + x^2,$$

y sean

$$u = (2, 0, 1);\ v = (3, 1, 0);\ w = (1, -2, 3).$$

Considérese la aplicación lineal $f : V \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(p(x)) = u;\ f(q(x)) = v;\ f(r(x)) = w.$$

(a) *Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas de V y $\mathbb{R}^3$.*

Llamamos $B_1 = \{p(x), q(x), r(x)\}$ al conjunto de polinomios dado. Veamos que es una base de V. Dado que $dim(V) = 3$, basta comprobar que la matriz de sus coordenadas con respecto a la base canónica tiene rango 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz de F respecto a la base B_1 de V y la base canónica C_2 de $\mathbb{R}^3$, será:

$$\left.\begin{array}{lcr} p(x) & \longrightarrow & (2, 0, 1) \\ q(x) & \longrightarrow & (3, 1, 0) \\ r(x) & \longrightarrow & (1, -2, 3) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad F_{C_2 B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Tenemos que cambiar de base en el primer espacio. La matriz de paso de la base B_1 a la canónica C_1 de V es:

$$M_{C_1 B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la matriz pedida es:

$$F_{C_2 C_1} = F_{C_2 B_1} M_{B_1 C_1} = F_{C_2 B_1} M_{C_1 B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Operando queda:

$$F_{C_2 C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3/2 & -1/2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) *Hallar una base B de V y otra base C de $\mathbb{R}^3$ tales que respecto de ellas, la matriz de f sea la identidad Id_3.*

Tenemos en cuenta que los vectores $B_2 = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$, ya que $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ y la matriz de sus coordenadas tiene rango 3 (su determinante es no nulo):

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Por tanto la aplicación f lleva la base B_1 en la base B_2, y así la matriz de f respecto a estas bases es la identidad.

IV.– *Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ una aplicación lineal dada por:*

$$f(a,b,c,d) = (a+b)x^2 + bx + (c-d)$$

a) *Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases B y B', con:*

$$B = \{(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,-1)\}, \quad B' = \{1+x+x^2, 1+x, 1\}.$$

Hallamos primero la matriz asociada respecto a las bases canónicas:

$$C = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}, \quad C' = \{1,x,x^2\}.$$

Se tiene:

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0,0) & = & x^2 \\ f(0,1,0,0) & = & x^2+x \\ f(0,0,1,0) & = & 1 \\ f(0,0,0,1) & = & -1 \end{array}$$

Por tanto:

$$F_{C'C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora hacemos un cambio de base:

$$F_{B'B} = M_{B'C'}F_{C'C}M_{CB} = M_{C'B'}^{-1}F_{C'C}M_{CB}$$

Donde:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_{C'B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$F_{B'B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) *Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas de $Ker(f)$ respecto de la base canónica.*

El núcleo está formado por aquellos vectores cuya imagen es nula. Equivalentemente por los vectores cuyas coordenadas en la base canónica multiplicadas por la matriz asociada $F_{C'C}$ son nulas:

$$F_{C'C}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a+b=0, \quad b=0, \quad c-d=0.$$

Las implícitas son por tanto:

$$a+b=0, \quad b=0, \quad c-d=0.$$

Las paramétricas las obtenemos poniendo todas las variables en función de $4-3=1$ de ellas:

$$a=0, \quad b=0, \quad c=d,$$

y quedan:

$$\begin{array}{c} a=0 \\ b=0 \\ c=\lambda \\ d=\lambda \end{array}$$

V.– *Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que dos. Consideramos las aplicaciones lineales:*

$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z)=(x+y,y+z,x+z)$$
$$g:\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad g(ax^2+bx+c)=(a-b,c+a-b,2b-a)$$

y las bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $B=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $C=\{1,x,x^2\}$.

Hallar la matriz asociada a la aplicación $f\circ g$ respecto de las bases C y B.

La composición es una aplicación lineal que va de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^3$:

$$(f\circ g):\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\xrightarrow{g}\mathbb{R}^3\xrightarrow{f}\mathbb{R}^3.$$

Llamamos $C'=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Si denotamos por $h=f\circ g$ se tiene:

$$H_{C'C}=F_{C'C'}G_{C'C}$$

y por la fórmula de cambio de base:

$$H_{BC}=M_{BC'}H_{C'C}=M_{C'B}^{-1}H_{C'C}=M_{C'B}^{-1}F_{C'C'}G_{C'C}$$

siendo

$$M_{CB'}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

Comenzamos entonces, calculando la matriz asociada a f con respecto a la base C', es decir, la matriz $F_{C'C'}$. Se tiene:

$$f(1,0,0)=(1,0,1)$$
$$f(0,1,0)=(1,1,0)$$
$$f(0,0,1)=(0,1,1)$$

Por tanto:

$$F_{C'C'}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Ahora hallamos $G_{C'C}$:

$$g(1)=g(0\cdot x^2+0\cdot x+1)=(0,1,0)$$
$$g(x)=g(0\cdot x^2+1\cdot x+0)=(-1,-1,2)$$
$$g(x^2)=g(1\cdot x^2+0\cdot x+0)=(1,1,-1)$$

de donde:

$$G_{C'C}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}.$$

Finalmente, la matriz pedida es:

$$H_{BC}=M_{C'B}^{-1}F_{C'C'}G_{C'C}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}.$$

VI.– *Sea el espacio vectorial V de las funciones reales de una variable, definidas sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones habituales de suma de funciones y producto por un escalar. Si ϕ es la aplicación que hace corresponder a cada terna de números reales (a, b, c) la función $f_{(a,b,c)}$ definida por:*

$$f_{(a,b,c)}(x) = a\mathrm{sen}^2 x + b\mathrm{cos}^2 x + c, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se pide:

a) *Probar que ϕ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en V.*

Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^3$ y $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$. Queremos ver que $\phi(\lambda(a, b, c) + \mu(a', b', c')) = \lambda\phi(a, b, c) + \mu\phi(a', b', c')$. Pero:

$$\begin{aligned}\phi(\lambda(a, b, c) + \mu(a', b', c'))(x) =&\phi(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c')(x) =\\ &= (\lambda a + \mu a')\mathrm{sen}^2 x + (\lambda b + \mu b')\mathrm{cos}^2 x + (\lambda c + \mu c') =\\ &= \lambda(a\mathrm{sen}^2 x + b\mathrm{cos}^2 x + c) + \mu(a'\mathrm{sen}^2 x + b'\mathrm{cos}^2 x + c') =\\ &= \lambda\phi(a, b, c)(x) + \mu\phi(a', b', c')(x)\end{aligned}$$

b) *Hallar una base de la imagen y otra del núcleo, analizando si ϕ es inyectiva o sobreyectiva.*

Es claro que la imagen está generada por las funciones $\{\mathrm{sen}^2\mathrm{x}, \mathrm{cos}^2\mathrm{x}, 1\}$. Hay que ver si estos tres vectores forman una base. Pero sabemos que hay una relación de dependencia lineal:

$$1 = \mathrm{sen}^2\mathrm{x} + \mathrm{cos}^2\mathrm{x}.$$

Luego a lo sumo formarán base de la imagen los vectores $\{\mathrm{sen}^2\mathrm{x}, \mathrm{cos}^2\mathrm{x}\}$. Comprobemos que son independientes. Supongamos $\lambda_1\mathrm{sen}^2\mathrm{x} + \lambda_2\mathrm{cos}^2\mathrm{x} = 0$. Entonces tomando $x = 0$, obtenemos que $\lambda_2 = 0$ y tomando $x = \pi/2$ obtenemos que $\lambda_1 = 0$. Vemos que efectivamente son independientes y por tanto forman una base de la imagen.

La aplicación no es sobreyectiva porque el espacio vectorial de funciones reales no tiene dimensión finita, mientras que la imagen de esta aplicación tiene dimensión 3. En particular, teniendo en cuenta que las funciones seno, coseno y la función constante 1 son períodicas de período 2π, deducimos que todas las funciones de la imagen son períodicas de período 2π. Por tanto la función identidad $f(x) = x$ no está en la imagen, porque no es períodica.

Dado que la dimensión de la imagen es 2 y la dimensión del espacio origen es 3, sabemos que el núcleo tiene dimensión 1. Basta encontrar un vector que sea enviado por ϕ a la función 0. Pero teniendo en cuenta la relación de dependencia vista antes, tenemos que $\phi(1, 1, -1) = 0$ y por tanto una base del núcleo está formanda por el vector $(1, 1, -1)$.

Por tanto la aplicación no es inyectiva porque el núcleo no es nulo.

c) *Comprobar que el conjunto U formado por las funciones constantes es un subespacio vectorial de V. Hallar su dimensión y una base.*

Es claramente un subespacio vectorial. Basta tener en cuenta que si f y g son funciones constantes, $\lambda f + \mu g$ es una función constante para cualquier $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Dada una función constante $g(x) = k$, $k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, puede escribirse como $g(x) = k \cdot 1$, representando en este caso 1, la función constantemente igual a 1. Por tanto el subespacio de funciones constantes tiene dimensión 1 y una base del mismo puede ser la función constante 1.

d) *Hallar el conjunto origen de U, si es un subespacio vectorial dar una base.*

Se trata de hallar la imagen inversa del subespacio vectorial U, es decir, los $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(a, b, c) \in U$. Recordemos que la imagen inversa de un subespacio vectorial por una aplicación lineal siempre es un subespacio vectorial. En este caso ha de verificarse que:

$$a\mathrm{sen}^2 x + b\mathrm{cos}^2 x + c$$

sea una función constante. Esto sólo ocurre si $a = b$ y por tanto una base del conjunto origen (o imagen inversa) de U es la formada por los vectores $(1,1,0)$ y $(0,0,1)$.

Nota. Comprobemos que dada una aplicación lineal $f : U \longrightarrow V$ y un subespacio vectorial $W \subset V$ siempre se cumple que $f^{-1}(W)$ es un subespacio vectorial de U:

- $f^{-1}(W)$ es no vacío porque $f(0) = 0 \in W$ y por tanto $0 \in f^{-1}(W)$.

- Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $w, w' \in f^{-1}(W)$. Veamos que $\lambda w + \mu w' \in W$. Pero:

$$\left.\begin{array}{lcl} w \in f^{-1}(W) & \Rightarrow & f(w) \in W \\ w' \in f^{-1}(W) & \Rightarrow & f(w') \in W \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lambda f(w) + \mu f(w') \in W \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(\lambda w + \mu w') \in W \quad \Rightarrow \quad \lambda w + \mu w' \in f^{-1}(W)$$

(Primer parcial, febrero 1999)

VII.– *Sean $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ aplicaciones lineales no nulas tales que $g \circ f$ es idénticamente cero y dim $Img = 3$. Calcular dim $Kerf$.*

Como $g \circ f$ es la aplicación nula, Imf $\subset$Ker$g$ (ésta es simplemente otra forma de escribir el hecho de que $g(f(\bar{x})) = 0$ para todo $\bar{x}$).

$g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ es una aplicación lineal y por tanto, dim Ker$g$+dim Img =dim$\mathbb{R}^4 = 4$. Dado que dim Im$g = 3$, deducimos dim Ker$g$=1.

El subespacio Imf está contenido en el subespacio unidimensional Ker$g$, luego Imf tiene dimensión 0 ó 1. No puede tener dimensión 0 porque en ese caso f sería la aplicación nula, cosa que se excluye en el enunciado. Por lo tanto dim Im$f = 1$.

$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ es una aplicación lineal y por tanto, dim Ker$f$+dim Imf =dim$\mathbb{R}^5 = 5$. Dado que dim Im$f = 1$, deducimos dim Ker$f = 4$.

(Examen final, septiembre 2007)

VIII.– *Sea la aplicación lineal:*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \qquad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z & 2y+z \\ x+z & x-2y \end{pmatrix}$$

(i) *Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*

Sea

$$C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y

$$C' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

. Entonces:

$$f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1,0,1,1)_C$$

$$f(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = (0,2,0,-2)_C$$

$$f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,1,1,0)_C$$

y así

$$F_{C'C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Hallar las ecuaciones paramétricas de $ker(f)$ respecto de la base canónica.*

Los vectores del núcleo son los vectores (x, y, z) verificando:

$$F_{C'C}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando resultan las ecuaciones:

$$x + z = 0, \qquad 2y + z = 0, \qquad x - 2y = 0$$

Eliminando las dependientes:

$$x + z = 0, \qquad 2y + z = 0$$

Y resolviendo obtenemos las paramétricas:

$$x = 2\lambda, \qquad y = \lambda, \qquad z = -2\lambda.$$

(iii) *Probar que* $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *es una base de* $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Dado que $dim(\mathcal{M}_{2\times 2}) = 4$, para ver que cuatro vectores forman base basta ver que son linealmente independientes. Equivalentemente que la matriz de sus coordenadas en la base canónica tiene rango 4. Para ello escalonamos la correspondiente matriz y vemos que resultan cuatro filas no nulas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{43}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iv) *Si* $B = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$ *hallar la matriz asociada a F respecto de las bases B y B'.*

La fórmula de cambio de base es:

$$F_{B'B} = M_{B'C'}F_{C'C}M_{CB} = M^{-1}_{C'B'}F_{C'C}M_{CB}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{C'B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$F_{B'B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

IX.–

(a) *Decidir si existe alguna aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *tal que*

$$\begin{aligned} ker\, f &= \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : x^1 - x^3 = x^2 = 0\}, \\ Im\, f &= \{(y^1, y^2, y^3, y^4) \in \mathbb{R}^4 : y^1 - y^2 = y^2 - y^3 = 0\}. \end{aligned}$$

Si existe, dar la matriz (con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$) de una que verifique estas condiciones. Si no existe, demostrarlo.

Para que exista la aplicación lineal pedida, la suma de la dimensión del núcleo y la dimensión de la imagen tiene que ser igual a la dimensión del espacio origen.

En este caso el núcleo está definido por dos ecuaciones independientes en $\mathbb{R}^3$ y por tanto tiene dimensión $3-2=1$.

La imagen está definida también por dos ecuaciones independientes en $\mathbb{R}^4$ y por tanto tiene dimensión $4-2=2$.

Deducimos que si existe la aplicación que nos piden.

Para definir una aplicación lineal basta tener en cuenta como actúa sobre los vectores de una base. Sabemos que sobre vectores del núcleo la aplicación es cero. Además sabemos cual es la imagen:

$$\begin{array}{l}\text{Base del núcleo: } \{(1,0,1)\}\\ \text{Base de la imagen: } \{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}\end{array}$$

Por tanto para definir f completamos la base del núcleo hasta una base de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(1,0,1)\}$$

(es una base porque son vectores independientes), y definimos f sobre sus vectores, llevando el núcleo al cero y los otros dos a los generadores de la imagen:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,1,1,0)\\ f(0,1,0) &= (0,0,0,1)\\ f(1,0,1) &= (0,0,0,0)\end{aligned}$$

Como nos piden la matriz de f con respecto a las bases canónicas nos interesa conocer la imagen de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sólo nos falta la imagen de $(0,0,1)$, pero:

$$f(0,0,1)=f(1,0,1)-f(1,0,0)=(-1,-1,-1,0)$$

Por tanto la matriz de f respecto de las bases canónicas es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Nota: La aplicación no es única. Podríamos haber escogido otros generadores de la imagen y definir de esta forma una aplicación diferente verificando las propiedades deseadas.

(b) *Idem para*

$$\begin{aligned} ker\, f &= \{(x^1,x^2,x^3)\in\mathbb{R}^3 : 2x^1-x^2+x^3=0\},\\ Im\, f &= \{(y^1,y^2,y^3,y^4)\in\mathbb{R}^4 : y^1+2y^2=y^1-y^3=0\}.\end{aligned}$$

Ahora el núcleo está definido por una ecuación en $\mathbb{R}^3$, luego su dimensión es $3-1=2$.

La imagen está definida por dos ecuaciones independientes en $\mathbb{R}^4$, luego su dimensión es $4-2=2$.

Se tiene $dim(\ker f)+dim(\operatorname{Im} f)=4>dim(\mathbb{R}^3)$ y por tanto no puede existir la aplicación lineal que nos piden.

(Primer parcial, febrero 2001)

X.– *Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$ y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Decidir razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si $f \circ f = id$ entonces $f = id$.*

FALSA: Por ejemplo si tomamos $V = \mathbb{R}^2$ y $f(x, y) = (y, x)$, se cumple que

$$(f \circ f)(x, y) = f(f(x, y)) = f(y, x) = (x, y)$$

por tanto $f \circ f = id$ pero sin embargo $f \neq id$.

(Es interesante observar que la matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que cumple $F_C \cdot F_C = Id$ pero $F_C \neq Id$.)

(b) *Si $f \circ f = 0$ entonces $f = 0$.*

FALSA: Por ejemplo si tomamos $V = \mathbb{R}^2$ y $f(x, y) = (y, 0)$, se cumple que

$$(f \circ f)(x, y) = f(f(x, y)) = f(y, 0) = (0, 0)$$

por tanto $f \circ f = 0$ pero sin embargo $f \neq 0$.

(Ahora la matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que cumple $F_C \cdot F_C = \Omega$ pero $F_C \neq \Omega$.)

(c) *Si $f \circ f = 0$ entonces 0 es autovalor de f.*

VERDADERO. Si $f = 0$ entonces para cualquier vector $\vec{u} \in V$ no nulo se cumple $f(\vec{u}) = \vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$, luego 0 es autovalor de f.

Si $f \neq 0$ existe un vector $\vec{u}$ no nulo tal que $f(\vec{u}) \neq \vec{0}$. Entonces:

$$f(f(\vec{u})) = (f \circ f)(\vec{u}) = \vec{0} = 0 \cdot f(\vec{u})$$

por tanto 0 es autovalor de f.

(d) *$Ker(f - Id) \subset Im(f)$.*

VERDADERO.

$$\vec{u} \in Ker(f - Id) \quad \Rightarrow \quad (f - Id)(\vec{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\vec{u}) - \vec{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = f(\vec{u}) \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \in Im(f).$$