4.– *Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual que 2. Sean:*

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \qquad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p'(0) = 0\}$$

(ii) *Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas de $U \cap V$ respecto de la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Reinterpretamos como están definidos ambos subespacios en función de coordenadas respecto de la base canónica $C = \{1, x, x^2\}$. Un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ tienen coordenadas en esta base $p(x) \equiv (a_0, a_1, a_2)_C$.

$p(1) = 0$ equivale a $a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 0$, es decir, $a_0 + a_1 + a_2 = 0$.

$p'(x) = a_1 + 2a_2x$ y por tanto $p'(0) = 0$ equivale a $a_1 = 0$.

Entonces:

$$U = \{(a_0, a_1, a_2)_C \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | a_0 + a_1 + a_2 = 0\}, \qquad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | a_1 = 0\}$$

Las ecuaciones implícitas de la intersección se construyen uniendo las de ambas subespacios:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

Son claramente independientes porque no son proporcionales.

Tenemos que $dim(U \cap V) = dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) - \text{n}^o$ de ecuaciones $= 3 - 2 = 1$.

Por tanto para las paramétrias resolvemos en función de 1 parámetro. De la segunda ecuación $a_1 = 0$ y sustituyendo en la primera: $a_2 = -a_0$. Quedan:

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -\lambda \end{cases}$$

(iii) *Probar que $B = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Dado que $dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) = 3$ y B tiene tres vectores para que sean base basta comprobar que son independientes. Equivalentemente que sus coordenadas respecto a la base canónica forman una matriz de rango 3:

$$\begin{aligned} &1 \equiv (1, 0, 0)_C \\ &x - 1 \equiv (-1, 1, 0)_C \\ &(x-1)^2 = 1 - 2x + x^2 = (1, -2, 1)_C \end{aligned}$$

y *rango* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3$ (porque ya está escalonada y tiene tres filas no nulas).

(iv) *Hallar las ecuaciones impliíctas de $U \cap V$ respecto de la base B.*

Tenemos la matriz de cambio de base:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que relaciona coordenadas $(b_0, b_1, b_2)_B$ en la base B y $(a_0, a_1, a_2)_C$ en la canónica:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = M_{CB} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Entonces las ecuaciones implícitas en la base canónica vimos que eran:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_1 = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

Sustituyendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} M_{CB} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \iff b_0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} M_{CB} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \iff b_1 - 2b_2 = 0$$

(v) *Dar las ecuaciones paramétricas de un subespacio W, tal que U y W sean suplementarios.*

Dado que U está definido por una sola ecuación tiene dimensión $dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) - 1 = 2$. La ecuación era $a_0 + a_1 + a_2 = 0$. Ponemos una variable en función de las otras dos:

$$a_2 = -a_0 - a_1$$

y tenemos las paramétricas:

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = \beta, \quad a_2 = -\alpha - \beta.$$

y de ahí los generadores:

$$U = \mathcal{L}\{(1, 0, -1)_C, (0, 1, -1)_C\}$$

Un espacio suplementario tendrá dimensión $dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) - dim(U) = 3 - 2 = 1$. Estará generado por un vector que junto con los dos de U generen todo $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, es decir, que el rango de la matriz que forman los tres sea 3. Basta tomar $(0, 0, 1)_C$ ya que la matriz que forman los tres sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de rango 3. Por tanto:

$$W = \mathcal{L}\{(0, 0, 1)_C\}$$

y sus paramétricas son:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \lambda.$$

(1.3 puntos)

6.– *En el espacio vectorial real* $\mathbb{R}^3$ *consideramos las siguientes bases:*

- *la base canónica* $C = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.
- *la base* $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\} = \{(0,1,1), (2,0,0), (1,0,1)\}$.
- *la base* $B'' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} = \{(1,-1,0), (0,0,-1), (1,1,1)\}$.

(a) Si $(1,3,2)$ *es un vector de* $\mathbb{R}^3$ *calcular sus coordenadas en cada una de las bases anteriores.*

(b) Denotamos por (y_1, y_2, y_3) *las coordenadas de un vector en la base* B'*. Consideramos el subespacio vectorial dado por la ecuacón:*

$$y_1 + 2y_2 - y_3 = 0$$

Calcular las ecuaciones paramétricas y cartesianas de este subespacio con respecto a cada una de las bases dadas.

Denotamos por $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)$ las coordenadas en las respectivas bases C, B' y B''. Las ecuaciones de cambio de coordenadas son:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{CB'}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{CB''}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix};$$

o equivalentemente:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

(a) Nos pieden escribir las coordenadas del vector $(1,3,2) \in \mathbb{R}^3$ en todas las bases anteriores. En primer lugar es claro que en la base canónica sus coordenadas son $(1,3,2)_e$. Ahora para calcular las coordenadas en las otras bases tan sólo hay que aplicar la fórmula de cambio de base:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};$$

(b) Ahora escribimos la ecuación de la siguiente forma:

$$y_1 + 2y_2 - y_3 = 0; \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$$

Utilizando la fórmula de cambio de base sustituimos (y_1, y_2, y_3) por su expresión en función de (x_1, x_2, x_3), obtenemos la ecuación cartesiana en la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0; \iff x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0;$$

Ahora sustituimos (x_1, x_2, x_3) por su expresión en función de (z_1, z_2, z_3) y obtenemos la ecuación cartesiana en la base B'':

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = 0; \iff -2z_1 + 2z_2 + 2z_3 = 0; \iff z_1 - z_2 - z_3 = 0$$

Las paramétricas pueden ser calculadas directamente a partir de las cartesianas. Sin embargo lo haremos de otra forma.

Primero calculamos las paramétricas en la base $\{u^i\}$ a partir de la ecuación cartesiana. Para ello escogemos dos vectores independientes que cumplan la ecuación y por tanto que generan el subespacio:

$$y_1+2y_2-y_3=0; \iff (y_1,y_2,y_3)=\lambda(1,0,1)_u+\mu(0,1,2)_u \iff \left\{\begin{array}{rcc} y_1= & \lambda & \\ y_2= & & \mu \\ y_3= & \lambda & +2\mu \end{array}\right.$$

Ahora para escribir las paramétricas en otras bases, basta hacer el cambio de base sobre los vectores que generan el subespacio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Las paramétricas en la base canónica quedan:

$$(x_1,x_2,x_3)=\lambda(1,1,2)_e+\mu(4,0,2)_e \iff \left\{\begin{array}{rcc} x_1= & \lambda & +4\mu \\ x_2= & \lambda & \\ x_3= & 2\lambda & +2\mu \end{array}\right.$$

Hacemos lo mismo para la base B'':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Las paramétricas en la base B'' quedan:

$$(z_1,z_2,z_3)=\lambda(0,-1,1)_v+\mu(2,0,2)_v \iff \left\{\begin{array}{rcc} z_1= & & +\ 2\mu \\ z_2= & -\lambda & \\ z^3= & \lambda & +2\mu \end{array}\right.$$

9.– *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *se consideran los subespacios vectoriales:*

$$U=\mathcal{L}\{(1,0,1),(2,0,1),(0,0,1)\}, \qquad V=\mathcal{L}\{(1,1,0),(1,2,3)\}$$

(i) *Hallar las ecuaciones implícitas de U y V respecto de la base canónica.*

En ambos casos nos dan un subespacios a través de sus generadores. Los pasos para hallar las impícitas son:

- Traducir los datos a la base canónica (lo cual es inmediato, ya que en la canónica componentes y coordenadas coinciden).

- Eliminar los posibles vectores dependientes.

- Escribir las paramétricas.

- Pasar de paramétricas a implícitas.

Para el subespacio U comenzamos eliminando los posibles vectores dependientes escalonando la matriz de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $U = \mathcal{L}\{(1,0,1),(0,0,1)\}$. Las paramétricas son:

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = a + b.$$

El número de ecuaciones implícitas es $dim(\mathbb{R}^3) - n^o$ de parámetros$= 3-2 = 1$. Eliminando parámetros se obtiene la ecuación:

$$y = 0.$$

Hacemos lo propio para el subespacio V:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto $U = \mathcal{L}\{(1,1,0),(0,1,3)\}$. Las paramétricas son:

$$x = a, \quad y = a + b, \quad z = 3b.$$

El número de ecuaciones implícitas es $dim(\mathbb{R}^3) - n^o$ de parámetros$= 3-2 = 1$. Eliminando parámetros:

$$a = x, \qquad y = x + b, \quad z = 3b.$$

$$b = y - x, \qquad z = 3(y - x).$$

Se obtiene la eucación implícita:

$$3x - 3y + z = 0.$$

(ii) *Probar razonadamente que los vectores de* $B = \{(0,0,1),(1,2,1),(1,3,1)\}$ *forman una base de* $\mathbb{R}^3$.

Como $dim(\mathbb{R}^3) = 3$, tres vectores forman base si y sólo son independientes, es decir, si la matriz de coordenadas tiene rango máximo o equivalentemente determinante no nulo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0.$$

(iii) *Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas de* $U \cap V$ *respecto de la base* B.

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ en la base canónica se obtienen uniendo las de uno y otro subespacio calculadas en el apartado (i):

$$y = 0, \qquad 3x - 3y + z = 0.$$

Son independientes por no ser proporcionales.

Para hacer el cambio de base a la base B las escribimos matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0$$

Usamos la fórmula de cambio de base:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B, \qquad M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las implícitas en la base B quedan:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B = 0, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B = 0$$

Operando y simplificando obtenemos las implícitas en la base B:

$$2y' + 3z' = 0, \qquad x' - 2y' - 5z' = 0.$$

Para las paramétricas resolvemos el sistema en función de $dim(\mathbb{R}^3) - n^o$ de ecuaciones$=3-2=1$ parámetros:

$$y' = -\frac{3z'}{2}, \qquad x = 5z' + 2y' = 2z'.$$

Tomando $z' = 2a$, quedan:

$$x' = 4a, \qquad y' = -3a, \qquad z' = 2a.$$

(iv) *¿Son U y V suplementarios?.*

Para que sean suplementarios ha de cumplirse (entre otras cosas) que $dim(U) + dim(V) = dim(\mathbb{R}^3)$. Pero dado que en (i) vimos que ambos subespacios están generados por dos vectores independientes:

$$dim(U) + dim(V) = 2 + 2 = 4 \neq 3 = dim(\mathbb{R}^3).$$

Por tanto NO son suplementarios.

(v) *Dar las ecuaciones paramétricas respecto de la base canónica de un subespacio vectorial suplementario a V.*

Dado que V tiene dimensión 2 un subespacio suplementario estará generado por $dim(\mathbb{R}^3) - 2 = 1$ vector independiente de los generadores de V. Como $V = \mathcal{L}\{(1,1,0),(0,1,3)\}$ basta tomar $W = \mathcal{L}\{(0,0,1)\}$ ya que:

$$dim(U+W) = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Por tanto el subespacio pedido tendría por paramétricas:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = a.$$

11.– *Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2. Consideramos los siguientes subconjuntos:*

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{x+1, x^2+1\}, \quad W = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1)^2 = p(1)\}$$

(i) *Estudiar si U y W son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

U SI es subespacio vectorial:

- Contiene al vector cero, es decir, al polinomio cero constante $p_0(x) = 0$, porque $p_0(1) = 0$.

- Dados $p(x), q(x) \in U$ y $a, b \in \mathbb{R}^2$ veamos que $ap(x) + bq(x) \in U$. Como $p(x), q(x) \in U$ se tiene que $p(1) = q(1) = 0$ y por tanto:

$$ap(1) + bq(1) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad ap(x) + bq(x) \in U.$$

W NO es subespacio vectorial. No cumple la propiedad: si $p(x) \in W$ entonces $k \cdot p(x) \in W$. Por ejemplo si $p(x) = 1$ entonces $p(x) \in W$ porque $p(1)^2 = 1^2 = 1 = p(1)$, pero $2p(x) \notin W$ porque $(2p(1))^2 = 2^2 = 4 \neq 2 = 2p(1)$.

(ii) *Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap V$ en la base canónica.*

La base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es $C = \{1, x, x^2\}$ de manera que si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ sus coordenadas en la base canónica son $(a_0, a_1, a_2)_C$.

Entonces si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \equiv (a_0, a_1, a_2)_C \in U$ significa que:

$$p(1) = 0 \iff a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 0 \iff a_0 + a_1 + a_2 = 0.$$

Por tanto:

$$U = \{(a_0, a_1, a_2)_C | a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$$

es decir $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ es la ecuación implícita de U en la base canónica.

Por otra parte $V = \mathcal{L}\{x+1, x^2+1\} = \mathcal{L}\{(1,1,0)_C, (1,0,1)_C\}$. Los dos generadores son independietntes porque no son proporcionales. Las paramétricas son:

$$a_0 = \alpha + \beta, \quad a_1 = \alpha, \quad a_2 = \beta$$

Y eliminando parámetros las implícitas:

$$a_0 - a_1 - a_2 = 0.$$

Las implícitas de $U \cap V$ se obtienen uniendo las de ambos subespacios (son independientes por no ser proporcionales):

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 - a_2 = 0 \end{cases}$$

Para hallar las paramétricas resolvemos el sistema en función de $3 - 2 = 1$ parámetros. Sumando las eucuaciones queda $a_0 = 0$ y después en la primera $a_2 = -a_1$. Por tanto las paramétricas quedan:

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = \lambda, \qquad a_2 = -\lambda.$$

(iii) *Demostrar que $B = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Dado que $dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) = 3$ y B está formado por tres vectores, para que sean base basta ver que son independientes; equivalentemente qu eel rango de la matriz que forman sus coordenadas es 3:

$$\begin{aligned} &1 = (1,0,0)_C \\ &x - 1 = (-1,1,0)_C \\ &(x-1)^2 = 1 - 2x + x^2 = (1,-2,1)_C \end{aligned}$$

Entonces:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \text{ (ya está escalonada).}$$

(iv) *Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de V en la base B.*

La ecuación implícita de V en la base canónica era $a_0 - a_1 - a_2 = 0$, que matricialmente puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_C = 0. \qquad (*)$$

Usamos la relación entre las coordenadas en distintas bases:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_C = M_{CB} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B \quad \text{donde } M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*):

$$(\,1 \quad -1 \quad -1\,)\, M_{CB} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B = 0 \iff b_0 - 2b_1 + 3b_2 = 0.$$

obteniendo la ecuación implícita en la base B. Para las paramétricas resolvemos en función de dos parámetros. Queda $b_0 = 2b_1 - 3b_2$ de donde:

$$b_0 = -2\alpha - 3\beta, \qquad b_1 = \alpha, \qquad b_2 = \beta.$$

(v) *¿Es posible descomponer cualquier vector de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ como suma de uno de U y otro de W?¿Es única esa descomposición?.*

No, no es posible. Si $p(x) = q(x) + r(x)$ con $q(x) \in U$ y $r(x) \in w$ entonces $q(1) = 0$ y $r(1)^2 = r(1)$, pero entonces $p(1) = q(1) + r(1) = r(1)$ tiene que cumplir $p(1)^2 = p(1)$. Cualquier polinomio que NO cumpla esa condición no podrá descomponerse; por ejemplo $p(x) = 2$.

13.– *En el espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ consideramos los subconjuntos $S = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A = A^t\}$ (matrices simétricas) y $H = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A^t = -A\}$ (matrices hemisimétricas).*

(i) *Probar que H es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*

Para ver que es subespacio hay que comprobar:

- Que contiene al vector cero: efecitvamente $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$ porque $\Omega^t = -\Omega$.

- Que dados $A, B \in H$ y $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $aA + bB \in H$. Pero si $A, B \in H$ entonces $A^t = -A$ y $B^t = -B$. Por tanto:

$$(aA + bB)^t = aA^t + bB^t = -aA - bB = -(aA + bB)$$

y por tanto $aA + bB \in H$.

(ii) *Demostrar que el conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*

Para que B sea una base tiene que cumplir dos condiciones:

- Tener tantos vectores como la dimensión del espacio. Pero $dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$ y B tiene cuatro vectores. Por tanto se cumple.

- Los vectores de B deben de ser linalmente independientes. Equivalentemente la matriz que forman sus coordenadas en la base canónica debe de ser de rango 4.

Recordemos que la base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv (1,0,0,0)_B, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv (1,1,0,0)_B, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv (1,1,1,0)_B, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1,1,1,1)_B$$

y

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

(iii) *Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de H en la base B.*

Una matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ pertenece a H si $A^t = -A$ es decir, si:

$$\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \iff x = -x,\, y = -z, \quad t = -t$$

Por tanto las implícitas de H en la base canónica son:

$$x = 0, \qquad y + z = 0, \qquad t = 0.$$

(son independientes porque el rango de la matriz de coeficientes es 3: $rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$).

Las pasamos a la base B. Para ello las escribimos matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

Y tenemos en cuenta la fórmula de cambio de base que relaciona las coorenadas en la base B y en la base C:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}, \quad M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Susituimos en las ecuaciones anteriores obtenemos las implicícitas en la base B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = 0 \iff x' + y' + z' + t' = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = 0 \iff y' + 2z' + 2t' = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = 0 \iff t' = 0$$

Para las paramétricas resolvemos el sistema que forman las ecuaciones anteriores en función de

$$dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) - \text{número de ecuaciones} = 4 - 3 = 1.$$

Obtenemos:

$$t' = 0, \qquad y' = -2z', \qquad x' = -y' - z' = z'.$$

de donde las paramétricas son:

$$x' = \lambda, \quad y' = -2\lambda, \quad z' = \lambda, \quad t' = 0.$$

(iv) *Sabiendo que S es también subespacio, probar que S y H son subespacios suplementarios.*

Son suplementarios si $dim(S + H) = dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$ y $dim(S \cap H) = 0$. Equivalentemente si $dim(S) + dim(H) = dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$ y $dim(S \cap H) = 0$ ó $dim(S + H) = dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$.

Hemos visto que $dim(H) = 1$ porque las paramétricas dependen de un parámetro y de hecho $H = \mathcal{L}\{(0, 1, -1, 0)_C\}$.

Por otra parte una matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ pertenece a S si $A^t = A$ es decir, si:

$$\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \iff z = y$$

De ahí las paramétricas serían:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = b, \quad t = c$$

y por tanto $S = \mathcal{L}\{(1,0,0,0)_C, (0,1,1,0)_C, (0,0,0,1)_C\}$ y $dim(S) = 3$.

Entonces $dim(S) + dim(H) = 3 + 1 = 4 = dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$ y la primera condición se cumple.

Además:

$$dim(S+H) = dim(\mathcal{L}\{\underbrace{(1,0,0,0)_C, (0,1,1,0)_C, (0,0,0,1)_C}_{S}, \underbrace{(0,1,-1,0)_C}_{H}\}) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

y por tanto se cumple la segunda condición.

(v) *Calcular la matriz que es proyección de* $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *sobre* H *paralelamente a* S*.*

La matriz dada tiene coordenadas $(1,3,1,1)_C$ en la base canónica. La pasamos a la base que combina una de S y otra de H:

$$B' = \{\underbrace{(1,0,0,0)_C, (0,1,1,0)_C, (0,0,0,1)_C}_{S}, \underbrace{(0,1,-1,0)_C}_{H}\}$$

Para ello usamos la fórmula de cambio de base:

$$M_{B'C}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{CB'}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de donde:

$$(1,3,1,1)_C = \underbrace{1\cdot(1,0,0,0)_C + 2\cdot(0,1,1,0)_C, +1\cdot(0,0,0,1)_C}_{S} + \underbrace{1\cdot(0,1,-1,0)_C}_{H}$$

y así la proyección sobre H es:

$$1\cdot(0,1,-1,0)_C = (0,1,-1,0)_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nota: También podría usarse que hemos visto en teoría que toda matriz se descompone de la forma:

$$A = \underbrace{\frac{A + A^t}{2}}_{\in S} + \underbrace{\frac{A - A^t}{2}}_{\in H}$$

Por tanto la proyección sobre H de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sería:

$$\frac{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

14.– *Sea V un espacio vectorial real y U_1, U_2, U_3 subespacios vectoriales. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones probando aquellas que sean ciertas y descartando con un contraejemplo las falsas.*

(a) $(U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3) \subset U_1 + (U_2 \cap U_3)$.

Es FALSA. Como contraejemplo basta tomar $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \mathcal{L}\{(1,0)\}$, $U_2 = \mathcal{L}\{(1,1)\}$ y $U_3 = \mathcal{L}\{(0,1)\}$. Entonces:

$$U_2 \cap U_3 = \{(0,0)\}, \quad U_1 + (U_2 \cap U_3) = U_1,$$

pero,

$$U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2, \quad U_1 + U_3 = \mathbb{R}^2, \quad (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3) = \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \not\subset U_1.$$

(b) $U_1 + (U_2 \cap U_3) \subset (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$.

Es CIERTO:

$$\vec{u} \in U_1 + (U_2 \cap U_3) \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{v}$$

con

$$\vec{u}_1 \in U_1, \qquad \vec{v} \in U_2 \cap U_3.$$

Pero como $U_2 \cap U_3 \subset U_2$ y $U_2 \cap U_3 \subset U_3$ también se cumple que:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{v} \in U_1 + U_2 \quad \text{y} \quad \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{v} \in U_1 + U_3$$

y por tanto:

$$\vec{u} \in (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3).$$

15.– *En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que 2 se consideran los subconjuntos:*

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p'(1) = p(0)\}, \quad V = \mathcal{L}\{1 + x^2\}$$

(i) *Probar que U es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Para ver que U es subespacio vectorial basta comprobar dos cosas:

1- Contiene al vector cero, es decir, al polinomio constante cero.

2- Dados $p(x), q(x) \in U$ y $a, b \in \mathbb{R}$ hay que demostrar que $ap(x) + bq(x) \in U$.

1. Si consideramos el polinomio nulo $p_0(x) = 0$ vemos que $p_0'(x) = 0$ y entonces $p_0'(1) = 0 = p_0(0)$ y así $p_0(x) \in U$.

2. Que $p(x), q(x) \in U$ significa que $p'(1) = p(0)$ y $q'(1) = q(0)$. Para ver que $ap(x) + bq(x) \in U$ hay que comprobar si $(ap + bq)'(1) = (ap + bq)(0)$. Pero:

$$(ap + bq)'(1) = ap'(1) + bq'(1) = ap(0) + bq(0) = (ap + bq)(0).$$

16.– *Sea V un espacio vectorial que tiene un sistema generador formado por 2018 vectores. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) V tiene un sistema de 2018 vectores linealmente independientes.

FALSO. Por ejemplo $\mathbb{R}^2$ tiene un sistema generador formado por 2018 vectores:

$$v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,2),\ v_3 = (0,3) \ldots,\ v_{2018} = (0,2018)$$

Pero el máximo número de vectores independientes es 2, porque $dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

(ii) $dim(V) \geq 2018$.

FALSO. Basta considerar el ejemplo del apartado (i), $V = \mathbb{R}^2$.

(iii) $dim(V) \leq 2018$.

VERDADERO. La dimensión de un espacio vectorial es el menor número de vectores que se necesitan para generarlo; por tanto si tenemos 2018 generadores, $dim(V) \leq 2018$.

(iv) *Cualquier subconjunto de V formado por* 2019 *vectores es un sistema de vectores linealmente dependientes.*

VERDADERO. Según vimos en (iii) $dim(V) \leq 2018$. Un espacio vectorial como máximo puede tener tantos vectores independientes como su dimensión; como $2019 > 2018 \geq dim(V)$, no puede haber 2019 vectores independientes.

I.– *En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ consideramos los subespacios vectoriales:*

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$
$$V = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A = -A^t\}.$$

(i) *Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de U y $U+V$ respecto de la base canónica.*

Escribimos las coordenadas de los vectores que generan U en la base canónica de las matrices 2×2:

$$C = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Recordemos que:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \equiv (x, y, z, t)_C$$

Entonces:

$$U = \{(1,0,0,1)_C, (2,1,1,1)_C, (1,1,1,0)_C\}$$

Eliminamos los vectores dependientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$U = \{(1,0,0,1)_C, (0,1,1,-1)_C\},$$

donde ahora los generadores son independientes. Las ecuaciones vectoriales son:

$$(x, y, z, t) = a(1,0,0,1) + b(0,1,1,-1),$$

y por tanto las paramétricas (separando coordenadas):

$$x = a, \quad y = b, \quad z = b, \quad t = a - b.$$

El número de ecuaciones implícitas es $dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}))$-número de parámetros=2. Las obtenemos eliminando parámetros:

$$y - z = 0, \quad x - y - t = 0.$$

Para calcular $U+V$ necesitamos los generadores de V. Tenemos que:

$$V = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A = -A^t\} = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | x = 0, \quad t = 0, \quad y + z = 0\right\}.$$

Por tanto las ecuaciones impícitas de V en la base canónica son:

$$x = 0, \quad y + z = 0, \quad t = 0.$$

El número de parámetro es $dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$-número de ecuaciones=1. Resolviendo el sistema las paramétricas son:

$$x = 0, \quad y = a, \quad z = -a, \quad t = 0.$$

Deducimos que $V = \mathcal{L}\{(0,1,-1,0)\}$.

Ahora, $U+V$ está generado por los generadores de cada uno de los subesapcios que sumamos:

$$U+V = \mathcal{L}\{\underbrace{(1,0,0,1)_C,(0,1,1,-1)_C}_{U},\underbrace{(0,1,-1,0)_C}_{V}\}$$

Eliminamos los posibles vectores dependientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

De donde:

$$U+V = \mathcal{L}\{(1,0,0,1)_C,(0,1,1,-1)_C,(0,0,-2,1)_C\}$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = b-2c, \qquad t = a-b+c$$

El número de implícitas es $dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}))$-número de parámetros=1. Eliminando parámetros queda:

$$2x - y - z - 2t = 0.$$

(ii) *¿Son U y V subespacios suplementarios?.*

No, porque la dimensión de $U+V$ que es tres, no coincide con la dimensión del espacio total $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que es cuatro.

(iii) *Probar que los vectores:*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

son una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Dado que B tiene tantos vectores como $dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$, para ver que forman base sólo es necesario comprobar que son independientes. Para ello comprobamos que la matriz de coordenadas de sus vectores respecto de la base canónica tiene rango cuatro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya está escalonada y no tiene filas nulas, luego su rango es cuatro.

(iv) *Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de U en la base B.*

Cambiamos de base las ecuaciones implícitas. En la base canónica eran:

$$y - z = 0, \quad x - y - t = 0.$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0.$$

Utilizamos la fórmula de cambio de base:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_C = M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}_B ,$$

donde $M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sustituyendo en las ecuaciones de U queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = 0.$$

Operando, las implícitas de U en la base B quedan:

$$y' + z' - 2t' = 0, \quad x' + y' - 2z' - t' = 0.$$

Pasamos a paramétricas resolviendo el sistema en función de dos parámetros:

$$x' = 3a - b, \quad y' = -a + 2b, \quad z' = a, \quad t' = b.$$

II.– *Sea V un espacio vectorial cualquiera. Dados tres subespacios vectoriales A, B, C estudiar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:*

○ $(A + B) \cap C \neq (A \cap C) + (B \cap C)$.

FALSO. Por ejemplo si $A = B = C$ se da la igualdad.

○ $(A + B) \cap C \subset (A \cap C) + (B \cap C)$.

FALSO. Por ejemplo para $V = \mathbb{R}^2$, $A = \mathcal{L}(1,0)$, $B = \mathcal{L}(0,1)$ y $C = \mathcal{L}(1,1)$, no se cumple.

○ $(A + B) \cap C \supset (A \cap C) + (B \cap C)$.

VERDADERO. Si $u \in (A \cap C) + (B \cap C)$ entonces u puede escribirse como:

$$u = a + b, \quad \text{con } a \in A \cap C \text{ y } b \in B \cap C.$$

Entonces

$$u = a + b \in C \text{ ya que } a, b \in C \text{ y } C \text{ es subespacio vectorial.}$$

y

$$u = a + b \in A + B \text{ ya que } a \in A \text{ y } b \in B.$$

Deducimos que $u \in (A + B) \cap C$.

○ $(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C)$.

FALSO. Por ejemplo para $V = \mathbb{R}^2$, $A = \mathcal{L}(1,0)$, $B = \mathcal{L}(0,1)$ y $C = \mathcal{L}(1,1)$, no se cumple.

III.– *Sea el espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$, $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ continua } \}$. *Consideramos el subespacio:*

$$W = \mathcal{L}\{sin^2(x/2), cos(x), cos(\frac{\pi}{2} - x), 2\}$$

(i) *Probar que los vectores de* $B = \{sin(x), cos(x), 1\}$ *son un sistema libre.*

Por definición para que sea un sistema libre tenemos que comprobar que:

$$asin(x) + bcos(x) + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = b = c = 0.$$

Damos valores a x:

$$\begin{array}{rcr} x = 0 & \Rightarrow & b + c = 0 \\ x = \pi/2 & \Rightarrow & a + c = 0 \\ x = \pi & \Rightarrow & -b + c = 0 \end{array}$$

De estas tres ecuaciones deducimos $a = b = c = 0$ y vemos que efectivamente los vectores indicados son indpendientes.

(ii) *Probar que* B *es una base de* W.

Como ya hemos visto que son indpendientes resta ver que es un sistema generador, es decir, que todo vector de W puede escribirse como combinación lineal de vectores de B:

$$\begin{aligned} sin^2(x/2) = \frac{1 - cos(x)}{2} &= 0 \cdot sin(x) - \frac{1}{2} \cdot cos(x) + \frac{1}{2} \cdot 1 \\ cos(x) &= 0 \cdot sin(x) + 1 \cdot cos(x) + 0 \cdot 1 \\ cos(\pi/2 - x) = sin(x) &= 1 \cdot sin(x) + 0 \cdot cos(x) + 0 \cdot 1 \\ 2 &= 0 \cdot sin(x) + 0 \cdot cos(x) + 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

(iii) *Fijado* $a \in R$, *probar que* $sin(x + a) \in W$.

Como B es una base de W, basta ver que $sin(x+a)$ puede ponerse como combinación lineal de vectores de B:

$$sin(x + a) = sin(x)cos(a) + cos(x)sin(a) = cos(a) \cdot sin(x) + sin(a) \cdot cos(x) + 0 \cdot 1.$$

(iv) *Escribir las coordenadas de* $sin(x + a)$ *respecto de la base* B.

Por lo visto en el apartado anterior las coordenadas serían:

$$(cos(a), sin(a), 0).$$

IV.– *Sea* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *el espacio vectorial de las matrices cuadradas de elementos reales y dimensión* n.

(a) *Demostrar que si* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *es una matriz fija, el conjunto*

$$S = \{B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : AB = \Omega\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

En primer lugar S es no vacío porque claramente $\Omega \in S$.

Sean $B, C \in S$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Hay que comprobar que $\lambda B + \mu C \in S$, es decir, que $A(\lambda B + \mu C) = \Omega \in S$. Pero:

$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC = \Omega$$

ya que como $B, C \in S$ entonces $AB = AC = \Omega$.

(b) *Si $n = 2$ y A es de la forma*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

donde α, β son números reales, calcular en función de α, β la dimensión y una base de S y las ecuaciones implícitas de un subespacio suplementario de S.

Sea B una matriz cuyas coordenadas en la base canónica son (x^1, x^2, x^3, x^4), es decir:

$$B = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ x^3 & x^4 \end{pmatrix}$$

La condición para que B pertenezca a S es que $AB = \Omega$, es decir:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha x^1 + x^3 \\ 0 &= \alpha x^2 + x^4 \\ 0 &= \beta x^1 + x^3 \\ 0 &= \beta x^2 + x^4 \end{aligned}$$

Es un sistema homogéneo. Si la matriz del sistema tiene determinante no nulo, entonces la única solución es la trivial. La matriz es:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Su determinante es $(\alpha - \beta)^2$. Por tanto:

- Si $\alpha \neq \beta$ entonces la única solución del sistema es la trivial ($x^1 = x^2 = x^3 = x^4 = 0$). El subespacio S es 0 y el suplementario todo el espacio de matrices $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

- Si $\alpha = \beta$, la matriz del sistema tiene rango 2 (las dos últimas filas son iguales a las dos primeras). Por tanto el sistema tiene solución dependiendo de $4 - 2 = 2$ parámetros y entonces $dim(S) = 2$. En particular obtenemos:

$$\begin{aligned} x^3 &= -\alpha x^1 \\ x^4 &= -\alpha x^2 \end{aligned}$$

luego una base de S está formada por los vectores cuyas coordenadas contravariantes en la base canónica son $(1, 0, -\alpha, 0)$ y $(0, 1, 0, -\alpha)$.

Para calcular un espacio suplementario completamos la base a de S a una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Basta tomar los vectores cuyas coordenadas en la base canónica son $(0, 0, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$. Ya que es es claro que los cuatro vectores:

$$\begin{aligned} &(1, 0, -\alpha, 0) \\ &(0, 1, 0, -\alpha) \\ &(0, 0, 1, 0) \\ &(0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

son una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. El espacio suplementario está generado por tanto por los vectores $(0, 0, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} x^1 &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x^3 &= \lambda \\ x^4 &= \mu \end{aligned}$$

y las cartesianas:

$$\begin{aligned} x^1 &= 0 \\ x^2 &= 0 \end{aligned}$$

V.– *En el espacio vectorial real de las matrices simétricas* 3×3 *con elementos reales,* $\mathcal{S}_3$*, decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales, y para los que lo sean hallar una base, así como unas ecuaciones (paramétricas e implìcitas) en la base canónica y en la base*

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) *Matrices regulares.*

Veamos si son un subespacio vectorial. Sean A, B regulares y simétricas. Nos preguntamos si entonces $\lambda A + \mu B$ son regulares para cualquier $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. En general no es cierto. Por ejemplo las matrices $A = I_3$ y $B = -I_3$, son regulares y simétricas. Sin embargo $A + B = \Omega$ no es regular.

(b) *Matrices con traza nula.* Veamos si son un subespacio vectorial. Sean A, B de traza nula y simétricas. Nos preguntamos si entonces $\lambda A + \mu B$ tiene traza nula para cualquier $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pero es claro que:

$$tr(\lambda A + \mu B) = \lambda(tr(A)) + \mu(tr(B))$$

y como $tr(A) = tr(B) = 0$ vemos que $tr(\lambda A + \mu B) = 0$.

Recordemos que la base canónica de las matrices simétricas es:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

En esta base la condición de tener la traza nula se escribe mediante la ecuación implícita:

$$x^1 + x^4 + x^6 = 0$$

y por tanto mediante las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{array}{lll} x^1 = \lambda_1; & x^2 = \lambda_2; & x^3 = \lambda_3; \\ x^4 = \lambda_4; & x^5 = \lambda_5; & x^6 = -\lambda_1 - \lambda_4; \end{array}$$

En la base B' la condición se escribe mediante la ecuación implícita:

$$y^1 + y^2 + y^4 + y^5 + y^6 = 0$$

y por tanto mediante las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{array}{lll} y^1 = \lambda_1; & y^2 = \lambda_2; & y^3 = \lambda_3; \\ y^4 = \lambda_4; & y^5 = \lambda_5; & y^6 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_5; \end{array}$$

(c) *Matrices cuyas dos primeras filas son iguales.*

Veamos si son un subespacio vectorial. Sean A, B simétricas cada una ellas con las dos primeras filas iguales. Nos preguntamos si entonces $\lambda A + \mu B$ tiene las dos primeras filas iguales para cualquier $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pero esto es cierto sin más que tener en cuenta que las dos primeras filas de $\lambda A + \mu B$ son la suma de λ por las dos primeras filas de A más μ por las dos primeras filas de B.

Las matrices simétricas con 2 filas iguales son de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & b \\ b & b & c \end{pmatrix}$$

Por tanto en la base canónica las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{array}{lll} x^1 = \lambda_1; & x^2 = \lambda_1; & x^3 = \lambda_2; \\ x^4 = \lambda_1; & x^5 = \lambda_2; & x^6 = \lambda_3 \end{array}$$

y las implícitas

$$\begin{aligned} x^1 - x^2 &= 0 \\ x^1 - x^4 &= 0 \\ x^3 - x^5 &= 0 \end{aligned}$$

Para ver como serían las ecuaciones en la base B', vemos como son las ecuaciones de cambio de coordenadas de B' a B:

$$\begin{array}{lll} x^1 = y^1 + y^2; & x^2 = y^2 + y^3; & x^3 = y^3 + y^4; \\ x^4 = y^4 + y^5; & x^5 = y^5 + y^6; & x^6 = y^6 \end{array}$$

De aquí deducimos que las ecuaciones implícitas en la base B' son:

$$\left.\begin{aligned} y^1 - y^3 &= 0 \\ y^1 + y^2 - y^4 - y^5 &= 0 \\ y^3 + y^4 - y^5 - y^6 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

y las paramétricas en las base B':

$$\begin{array}{lll} y^1 = \lambda_1; & y^2 = \lambda_2; & y^3 = \lambda_1; \\ y^4 = \lambda_3; & y^5 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3; & y^6 = -\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{array}$$

VI.– *En el espacio vectorial real V de las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, se consideran los dos conjuntos siguientes:*

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{ f \in V \ : \ \int_0^1 f(x)\ dx = 0 \right\} \\ U_2 &= \{ f \in V \ : \ f \ \text{ es } \ \text{constante} \} \end{aligned}$$

(a) *Comprobar que U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V.*

En primer lugar U_1 y U_2 son no vaciíos porque ambos contienen a la función constante 0.

Primero lo comprobamos para U_1. Sean $f, g \in U_1$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tenemos que verificar que $\lambda f + \mu g \in U_1$. Tenemos en cuenta que como $f, g \in U_1$, entonces $\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 g(x)\ dx = 0$. Ahora:

$$\int_0^1 (\lambda f + \mu g)(x)\ dx = 0 = \int_0^1 (\lambda f(x) + \mu g(x))\ dx = 0 = \lambda \int_0^1 f(x)\ dx + \mu \int_0^1 g(x)\ dx = 0$$

y por tanto $\lambda f + \mu g \in U_1$.

Lo comprobamos para U_2. Sean $f, g \in U_1$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Simplemente hay que tener en cuenta que como $f(x) = a$ y $g(x) = b$ para cualquier $x \in [0,1]$, entonces $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda a + \mu b$ para cualquier $x \in [0,1]$, y por tanto $(\lambda f + \mu g)$ es constante y está en U_2.

(b) *Analizar si U_1 y U_2 son subespacios suplementarios de V.*

Son suplementarios si su intersección es el subespacio 0 y si generan todo el espacio V, es decir, si cualquier función de V es suma de una de U_1 más otra de U_2.

Supongamos que f está en $U_1 \cap U_2$. Por estar en U_2 es constante, es decir, $f(x) = a, \quad \forall x \in [0,1]$. Por estar en U_1, su integral entre 0 y 1 es cero. Entonces:

$$0 = \int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 a\ dx = a$$

Deducimos que f es la función constante cero y así $U_1 \cap U_2 = \{\bar{0}\}$.

Sea ahora una función continua f cualquiera. Veamos como podemos descomponerla en una función de U_1 más otra de U_2, es decir, $f = f_1 + f_2$. Como f_2 ha de ser una función constante, podemos escribir $f(x) = f_1(x) + a$. Además queremos que $\int_0^1 f_1(x)\,dx = 0$. Pero entonces:

$$0 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 (f(x) - a)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - a \qquad \Rightarrow \qquad a = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Por tanto si tomamos como f_2 la función constante $\int_0^1 f(x)$ y como $f_1 = f - f_2$, tenemos la función f descompuesta como suma de funciones de U_1 y U_2. Queda probado que estos espacios son suplementarios.

(c) *Hallar, si existe, la proyección de $h(x) = 1 + 2x$ sobre U_1 paralelamente a U_2.*

Como hemos visto que los subespacios son suplementarios podemos hallar la proyección sobre U_1 paralelamente a U_2 de cualquier función continua $f \in V$. Además en el apartado anterior hemos visto como se calcula la función $f_1 \in U_1$ a partir de la función f. En este caso:

$$h_1(x) = h(x) - h_2(x) = h(x) - \int_0^1 h(x)\,dx = h(x) - \int_0^1 (1+2x)\,dx = 1 + 2x - 2 = 2x - 1$$

(Examen final, setiembre 2002)

VII.– *En $\mathbb{R}^3$ y para cada $a \in \mathbb{R}$, consideramos los subespacios vectoriales:*

$$U = \mathcal{L}\{(a,1,0),(0,a,1),(1,0,-1)\}, \quad V = \mathcal{L}\{(a,0,-1),(a-1,0,2a)\}.$$

(a) *Hallar la dimensión de $U, V, U+V$ y $U \cap V$ en función de los valores de a.*

Comenzamos estudiando la dimensión de U. Equivalententemente el rango de la matriz formada por las coordenadas de los vectores que lo generan. Dado que el rango se conserva por operaciones elementales, simplificaremos esa matriz mediante equivalencia por filas:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Vemos que las dos primeras filas siempre son linealmente independientes. Además la tercera se anula si y sólo si $1 - a^2 = 0$. Por tanto:

- Si $a = \pm 1$ entonces $dim(U) = 2$.

- Si $a \neq \pm 1$ entonces $dim(U) = 3$.

Hacemos lo mismo para V:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ a-1 & 0 & 2a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ a-1+2a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que el rango es como mínimo 1 en cualquier caso, y no vale 2 si $a - 1 + 2a^2 = 0$:

$$2a^2 + a - 1 = 0 \iff a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \iff a = -1 \text{ ó } a = 1/2.$$

Por tanto:

- Si $a = -1$ ó $a = 1/2$ entonces $dim(V) = 1$.

- Si $a \neq 1/2, -1$ entonces $dim(V) = 2$.

Para la unión tenemos en cuenta que:

$$3 = dim(R^3) \geq dim(U+V) \geq dim(U).$$

Por tanto en los casos en los que $dim(U) = 3$ automáticamente deducimos que $dim(U+V) = 3$. Nos interesa fijarnos por tanto en los valores $a = 1$ y $a = -1$. Para estudiar la dimensión del espacio suma hallamos el rango formado por las coordenadas de los vectores que forman base de cada una de los subespacios. Para $a = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vemos que el rango es 3.

Para $a = -1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Vemos que el rango es también 3.

Por tanto siempre se cumple $dim(U+V) = 3$. Finalmente para hallar la dimensión de la intersección utilizamos que:

$$dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U+V)$$

de manera que obtenemos:

a	$dim(U)$	$dim(V)$	$dim(U+V)$	$dim(U \cap V)$
-1	2	1	3	0
$1/2$	3	1	3	1
1	2	2	3	1
otro caso	3	2	3	2

(b) *¿Para qué valores de a los subespacios U y V son suplementarios?.*

Los espacios son suplementarios si la suma es todo R^3 y la intersección $\{\vec{0}\}$; equivalentemente si $dim(U+V) = 3$ y $dim(U \cap V) = 0$. Pero eso ocurre para $a = -1$.

(c) *Para los valores de a para los cuales sea posible, calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección sobre U paralelamente a V.*

La proyección tiene sentido cuando los espacios son suplementarios; en nuestro caso para $a = -1$. Formaremos una base con los vectores que generan U y V en la cual la matriz de la proyección es sencilla:

$$B = \{\underbrace{(-1,1,0),(0,-1,1)}_{\in U}, \underbrace{(1,0,1)}_{\in V}\}.$$

En esta base la matriz de la proyección es:

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente la pasamos a la base canónica:

$$P_C = M_{CB} P_B M_{BC} = M_{CB} P_B M_{CB}^{-1},$$

siendo

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$P_C = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(d) *Para $a = 0$, ¿es posible descomponer el vector $(1,1,1)$ como suma de un vector de U y otro de V?. Si existe, ¿es única esta descomposición?.*

Hemos visto que para $a = 0$,

- $dim(U + V) = 3$, y por tanto $U + V = \mathbb{R}^3$ y cualquier vector puede expresarse como suma de uno de U y otro de V.

- $dim(U \cap V) = 2$, luego los subespacios no son suplementarios y la descomposición no es única.

De manera explícita, para $a = 0$:

$$U = \mathcal{L}\{(0,1,0),(0,0,1),(1,0,-1)\}, \quad V = \mathcal{L}\{(0,0,-1),(-1,0,0)\}.$$

y por ejemplo:

$$(1,1,1) = \underbrace{(0,1,1)}_{\in U} + \underbrace{(1,0,0)}_{\in V} = \underbrace{(1,1,-1)}_{\in U} + \underbrace{(0,0,2)}_{\in V}.$$

VIII.– *En $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y fijado $k \in \mathbb{R}$ se consideran los siguientes subespacios vectoriales:*

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}, \quad V = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

(i) *Calcular en función de k, $dim(U), dim(V), dim(U \cap V)$ y $dim(U + V)$.*

La dimensión de cada espacio es el rango de la matriz formada por las coordendas de los vectores que lo generan. Trabajaremos respecto a la base canónica de matrices 2×2.

$$dim(U) = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & k \\ k & 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ k & 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 0 & k \end{pmatrix} =$$

$$= rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -k & k & 1-2k \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 \text{ si } k \neq 0, 2 \\ 2 \text{ si } k = 0, 2 \end{cases}$$

$$dim(V) = rango \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 0 & 2 \\ k & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 0 & 2 \\ 0 & -k(k-1) & 0 & 2-2k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} 2 \text{ si } k \neq 1 \\ 1 \text{ si } k = 1 \end{cases}$$

La suma está generada por los generadores de ambos subespacios:

$$dim(U + V) = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & k-1 & 0 & 2 \\ 0 & -k & k & 1-2k \\ 0 & -k(k-1) & 0 & 2-2k \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & k-2 & 0 & 0 \\ 0 & -k & k & 1-2k \\ 0 & -k(k-1) & 0 & 2-2k \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

Si $k \neq 0, 2$ vemos que $dim(U + V) = 4$.

Si $k=0$:

$$dim(U+V) = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3.$$

Si $k=2$:

$$dim(U+V) = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Finalmente para la intersección tenemos en cuenta que:

$$dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U+V).$$

Resumimos los resultados en el siguiente cuadro:

	$dim(U)$	$dim(V)$	$dim(U+V)$	$dim(U \cap V)$
$k=0$	2	2	3	1
$k=1$	3	1	4	0
$k=2$	2	2	3	1
$k \neq 0,1,2$	3	2	4	1

(ii) *Para $k=2$ hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de $U+V$ con respecto a la base canónica.*

Para $k=2$ y tabajando respecto de la base canónica tenemos que:

$$U+V = \mathcal{L}\{(1,1,0,2),(0,-2,2,-3),(0,-2,0,-2)\}.$$

Por tanto las ecuaciones paramétricas son:

$$x=a, \quad y=a-2b-2c, \quad z=2b, \quad t=2a-3b-2c.$$

El número de implícitas es $4-dim(U+V)=4-3=1$. Obtenemos tal ecuación eliminando parámetros:

$$2x+2y-z-2t=0.$$

IX.– *Consideremos los subespacios U y W de $\mathbb{R}^3$ tales que U está generado por los vectores $(1,0,1),(0,1,1),(1,1,2)$ y la ecuación implícita de W es $x-y+2z=0$. Se pide:*

(a) *Bases de U, W, $U+W$ y $U \cap W$.*

Del sistema generador dado para el subespacio U, obtenemos un sistema generador linealmente independiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto una base de U es:

$$\{(1,0,1),(0,1,1)\}.$$

Por otra parte W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por una ecuación. Tiene dimensión $3-1=2$. Una base estará formada por dos vectores independientes verificando su ecuación:

$$\{(1,1,0),(0,2,1)\}$$

El espacio $U+V$ está generado por la base de U unida a la de W. Buscamos un sistema de generadores independiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que generan un espacio de dimensión 3. Por tanto $U+V = \mathbb{R}^3$ y como base podemos tomar la base canónica.

Finalmente para calcular $U \cap V$, hallamos la ecuación implícita de U a parir de las paramétricas:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \\ y &= b \\ z &= a+b \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad z = x+y.$$

Por tanto las ecuacionesn implícitas de la intersección son:

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ x-y+2z &= 0 \end{aligned}$$

Para escribir una base escogemos un vector verificando ambas ecuaciones:

$$\{(1,-3,-2)\}.$$

(b) *Ecuaciones implícitas de $U \cap W$.*

Las hemos hallado en el apartado anterior:

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ x-y+2z &= 0 \end{aligned}$$

(c) *Base de un subespacio H suplementario de $U \cap W$.*

Teniendo en cuenta que $U \cap W$ tiene dimensión 1 y es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, un suplementario será un subespacio de dimensión 2 cuya suma con esta intersección sea el total $\mathbb{R}^3$. Por tanto, como base basta escoger dos vectores independientes con el vector $(1,-3,-2)$ que genera $U \cap W$. Por ejemplo:

$$H = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\},$$

ya que la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

tiene rango máximo 3.

(d) *Proyección del vector $(2,3,5)$ sobre el subespacio $U \cap W$ paralelamente a H.*

Consideramos una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores de H y $U \cap W$:

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,-3,-2)\}.$$

Expresemos el vector $(2,3,5)$ en esta base. Si llamamos C a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ se tiene:

$$M_{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}_C = M_{CB^{-1}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 9/2 \\ -9/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}_B.$$

Es decir:

$$(2,3,5) = \underbrace{\frac{9}{2}(1,0,0) - \frac{9}{2}(0,1,0)}_{\in H}\underbrace{-\frac{5}{2}(1,-3,-2)}_{\in U\cap W}.$$

La proyección sobre $U \cap W$ paralelamente a H será:

$$-\frac{5}{2}(1,-3,-2) = (-\frac{5}{2},\frac{15}{2},5).$$

X.– *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$*, dados dos valores reales* $a, b \in R$ *se definen los subespacios:*

$$U = \mathcal{L}\{(1,a,1),(b,1,a)\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(0,1,1),(a-1,1,b)\}.$$

(a) *Calcular en función de a y b la dimensión de* $U \cap V$*.*

Utilizaremos que:

$$dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U + V).$$

Estudiamos la dimensión de U:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-ab & a-b \end{pmatrix}.$$

Vemos que el rango es 2 excepto si se cumple simultáneamente que:

$$1 - ab = 0, \qquad a = b.$$

Resolviendo el sistema obtenemos $a = b = 1$ ó $a = b = -1$. Por tanto:

Parámetros	$dim(U)$
$a = b = 1$	1
$a = b = -1$	1
otro caso	2

Estudiamos la de V:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & b-1 \end{pmatrix}.$$

Vemos que el rango es 2 excepto si se cumple simultáneamente que:

$$a - 1 = 0, \qquad b - 1 = 0.$$

Resolviendo el sistema obtenemos $a = b = 1$. Por tanto:

Parámetros	$dim(V)$
$a = b = 1$	1
otro caso	2

Vayamos con la suma de ambos subespacios:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a \\ b & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1-b(1-a) \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1-(a-1)(1-a) \end{pmatrix}$$

El rango es 3 excpeto si se cumple simultáneamente que:

$$a - 1 - b(1-a) = 0, \qquad b - 1 - (a-1)(1-a) = 0.$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

Parámetros	$dim(U+V)$
$a = b = 1$	2
$a = 1 \pm \sqrt{2}, \quad b = -1$	2
otro caso	3

Aplicando la fórmula para la dimensión de la intersección tenemos:

Parámetros	$dim(U)$	$+$	$dim(V)$	$-$	$dim(U+V)$	$=$	$dim(U\cap V)$
$a=b=1$	1		1		2		0
$a=b=-1$	1		2		3		0
$a=1\pm\sqrt{2},\quad b=-1$	2		2		2		0
otro caso	2		2		3		1

(b) *Calcular los valores de a y b para los cuales los subespacios son suplementarios.*

Son suplementarios si $dim(U\cap V)=0$ y $dim(U+V)=dim(\mathbb{R}^3)=3$. Vimos que eso se cumple para $a=b=-1$.

(d) *Para $a=b=0$ calcular las ecuaciones cartesianas y paramétricas de $U\cap V$.*

Vimos que en ese caso la dimensión de la intersección es 1.

Tenemos:

$$U=\mathcal{L}\{(1,0,1),(0,1,0)\}.$$

Sus paramétricas son

$$x=a,\quad y=b,\quad z=a.$$

y la implícita:

$$x=z.$$

Por otra parte:

$$V=\mathcal{L}\{(0,1,1),(-1,1,0)\}.$$

Sus paramétricas son

$$x=-b,\quad y=a+b,\quad z=a.$$

y la implícita:

$$y=z-x.$$

Concluimos que las implícitas de la intersección son:

$$x=z,\quad y=z-x.$$

o equivalentemente:

$$x=z,\quad y=0.$$

Las paramétricas serán:

$$x=\lambda,\quad y=0,\quad z=\lambda.$$