1.– *Hallar la forma reducida equivalente por filas de la matriz:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{H_{41}(-5)\\H_{51}(-1)}]{\substack{H_{21}(-3)\\H_{31}(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{H_{42}(4)\\H_{52}(-1)}]{\substack{H_{12}(-2)\\H_{32}(5)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3(\frac{-1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{H_{13}(-5)\\H_{23}(2)\\H_{43}(10)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.– *Obtener mediante transformaciones elementales el rango, la forma canónica B respecto de la equivalencia y matrices no singulares P y Q que cumplan $B = PAQ$, siendo A cada una de las matrices del problema anterior.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\nu_{41}(-1)\\\nu_{42}(1)\\\nu_{43}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que tiene rango 3. Como en el apartado anterior, calculamos las matrices P y Q de paso realizando las operaciones elementales sobre la matriz identidad (¡OJO!, la identidad de orden igual al número de filas para la matriz P y de orden igual al número de columnas para la matriz Q).

Para la matriz P, que es la matriz de paso por filas, realizamos sobre la identidad las mismas operaciones files que hemos hecho en el ejercicio 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{H_{21}(-3)\\H_{31}(-2)\\H_{41}(-5)\\H_{51}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{H_{12}(-2)\\H_{32}(5)\\H_{42}(4)\\H_{52}(-1)}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -4 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3(\frac{-1}{10})}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 7/10 & -1/2 & 2/5 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{H_{13}(-5)\\H_{23}(2)\\H_{43}(10)}} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 0 & -1/5 & 0 & 0 \\ 7/10 & -1/2 & 2/5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para la matriz Q, que es la matriz de paso por columnas, realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columnas que hemos hecho antes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\nu_{41}(-1) \\ \nu_{42}(1) \\ \nu_{43}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos:

$$P = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 0 & -1/5 & 0 & 0 \\ 7/10 & -1/2 & 2/5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.– *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(iv) *Estudiar si AA^t y BB^t son congruentes.*

Tenemos:

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad BB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Id$$

Son dos matrices simétricas. Son congruentes si al diagonalizarlas por congruencia (mismas operaciones fila y columna) se obtienen matrices con los mismos signos en la diagonal. La matriz BB^t ya está diagonalizada: es la identidad con tres signos positivos en la diagonal.

Veamos que ocurre con AA^t:

$$AA^t \xrightarrow{H_{21}(-5/3)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-5/3)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \xrightarrow{\mu_{23}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Vemos que en la forma diagonalizada también aparecen tres signos positivos. Por tanto AA^t y BB^t SI son congruentes.

4.– *Sean las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(i) *Estudiar para que valores de a, b las matrices son equivalentes por filas.*

Para estudiar si son equivalentes por filas hallamos la forma canónica reducida por filas de cada una de ellas, escalonando con operaciones elementales fila. Seran equivalentes por filas si y sólo si las formas canónicas reducidas por filas son las misma. Comenzamos con la matriz B que no depende de ningún parámetro:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1/2)} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(1/4)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b-2a \end{pmatrix}$$

Entonces son equivalentes por filas si y sólo si $b - 2a = 0$ (para que tengan el mismo rango) y $a = 1/2$ (para que coincidan las formas reducidas). Es decir, $a = 1/2$ y $b = 1$.

(ii) *Estudiar para que valores de a, b las matrices son equivalentes por columnas.*

Realizamos el estudio análogo pero con operaciones columna:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mu_1(1/4)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(-a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & b-2a \end{pmatrix}$$

Vemos que es imposible que sean equivalentes por columna porque $b - 2a$ debería de ser nulo, para que tengan el mismo rango; y entonces en la formas canónicas reducidas por columnas en la posición $2, 1$ en una aparece $1/2$ y en la otra 2: nunca coinciden.

(iii) *Para los valores de a, b obtenidos en (i) dar una matriz inversible P tal que $PA = B$.*

Realizamos sobre la identidad las operaciones fila hechas para pasar de A a la forma reducida por filas y después la inversa y en orden opuesto de las realizadas a B:

$$Id \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_1(4)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P.$$

7.– *Sean las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & a & 6 \\ 2 & 1 & b \end{pmatrix}$

(i) *Estudiar para que valores de a, b las matrices son equivalentes por filas.*

Para ver si son equivalentes por filas, comparamos las formas canónicas reducidas por filas de ambas matrices. Empezamos con la matriz A:

$$A \overset{H_{21}(-2)H_{31}(-4)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(1)H_{32}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_2(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz B:

$$B \overset{H_{21}(-1)H_{31}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & a & 8 \\ 0 & 1 & b+4 \end{pmatrix} \overset{H_{23}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & b+4 \\ 0 & a & 8 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & b+4 \\ 0 & 0 & 8-ab-4a \end{pmatrix}$$

Para que ambas formas canónicas reducidas por filas coincidan tienen que cumplirse:

$$b + 4 = 4, \qquad 8 - ab - 4a = 0.$$

De donde $b = 0$ y $a = 2$.

(ii) *Hallar (si existe) una matriz $X \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ inversible tal que* $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Multiplicar por una matriz inversible a la derecha equivale a hacer operaciones elementales columna sobre A:

$$A \overset{\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \overset{\mu_{12}(2)\mu_{32}(-4)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mu_2(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mu_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar X hacemos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hemos hecho en el proceso anterior.

$$Id \overset{\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{12}(2)\mu_{32}(-4)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{\mu_2(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = X$$

8.– *Sean* $X=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&1&1\\2&3&2&1\end{pmatrix}$ *e* $Y=\begin{pmatrix}2&2&2&0\\2&0&2&a\\1&-1&1&-2\end{pmatrix}$.

(i) *Hallar los valores de* a *para que* X *e* Y *sean equivalentes por filas.*

Para que sean equivalentes por filas tienen que tener la misma forma canónica reducida por filas.

Comenzamos con la matriz X:

$$X \overset{H_{21}(-1)H_{31}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&1\end{pmatrix} \overset{H_{12}(-1)H_{32}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Ahora la matriz Y:

$$Y \overset{H_1(1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&0&2&a\\1&-1&1&-2\end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)H_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&-2&0&a\\0&-2&0&-2\end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{H_3(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&-2&0&a\\0&1&0&1\end{pmatrix} \overset{H_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&-2&0&a\end{pmatrix} \overset{H_{12}(-1)H_{32}(2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&1\\0&0&0&a+2\end{pmatrix}$$

Vemos que para que las formas reducidas coincidan tiene que cumplirse que $a+2=0$, es decir $a=-2$.

(ii) *Hallar los valores de* a *para que* X *e* Y *sean equivalentes por columnas.*

Ahora comparamos las formas reducidas por columnas. Para la matriz X:

$$X \overset{\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&1\\2&1&0&1\end{pmatrix} \overset{\mu_{12}(-1)\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

Para la matriz Y:

$$Y \overset{\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix}2&0&0&0\\2&-2&0&a\\1&-2&0&-2\end{pmatrix} \overset{\mu_{12}(1)\mu_{42}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-2&0&a+2\\-1&-2&0&0\end{pmatrix} \overset{\mu_1(1/2)\mu_2(-1/2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&a\\1/2&1&0&0\end{pmatrix}$$

Vemos (nos fijamos en la primera columna) que la forma reducida de Y por columnas no coincide con la de X para ningún valor de a.

9.– *Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix}1&a\\1&b\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$, *hallar los valores de* a *y* b *para que* A *y* B *sean congruentes. Para tales valores dar una matriz* P *tal que* $PAP^t=B$.

Dado que B es simétrica, para que sean congruentes A también tiene que ser simétrica, ya que la congruencia conserva la simetría. Por tanto $a=1$.

Además son congruentes si y sólo si al ser diagonalizadas por congruencia tenemos los mismos signos en la diagonal:

$$B=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

y teniendo en cuenta que ya sabemos que $a=1$:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&b\end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&0\\0&b-1\end{pmatrix}$$

Deducimos que son congruentes si y sólo si $a=b=1$.

La matriz P verificando $PAP^t=B$ es la matriz de paso por filas de A hacia B. Realizamos sobre la identidad las mismas operaciones fila para llegar de A a la forma diagonal y de ésta a a la matriz B:

$$Id \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix} \overset{H_{21}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=P.$$

10.– *Obtener mediante transformaciones elementales las inversas de las siguientes matrices:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la inversa hacemos la reducción por filas hasta llegar a la identidad; la matriz inversa se obtiene realizando las mismas operaciones sobre la matriz identidad. Podemos hacer ambos procesos al mismo tiempo:

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{H_{21}(-1) \\ H_{31}(-1)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{H_{2}(-1/2) \\ H_{3}(1/3)}}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \overset{H_{12}(-1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{H_{13}(-3/2) \\ H_{23}(1/2)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/6 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora si a la penúltima fila le sumamos la última; luego a la antepenúltima le sumamos la pemúltima y así sucesivamente obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto la inversa pedida es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.– *Discutir y, en su caso, resolver, en función del parámetro o parámetros correspondientes, los siguientes sistemas de ecuaciones:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ x+ay+z & = & a \\ x+y+az & = & a^2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} ax+ay & = & b \\ bx+ay & = & a \\ abx+aby & = & 1 \end{array}\right.$$

(a) Escribimos la matriz asociada al sistema y la ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

Entonces $|A| = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$. Por tanto:

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ el rango de A es 3 y coincide con el rango de $\overline{A}$ y con el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x = \frac{-a-1}{a+2}; \qquad y = \frac{1}{a+2}; \qquad z = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

Si $a = -2$ ó $a = 1$ estudiamos el rango de la matriz ampliada. En particular:

- Si $a = 1$ vemos que las tres ecuaciones son en realidad la misma. Es decir el rango de A y de $\overline{A}$ es 1. El sistema es compatible indeterminado. La solución depende de dos parámetros:

$$x = 1 - \lambda - \mu; \qquad y = \lambda; \qquad z = \mu$$

- Si $a = -2$, vemos que el rango de $\overline{A}$ es 3, ya que el menor formado por las columnas $2, 3, 4$ tiene determinante no nulo. Por tanto, como A es en este caso tiene rango 2, el sistema es incomptaible.

(b) Escribimos la matriz asociada al sistema y la ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ b & a \\ ab & ab \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ ab & ab & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A, a lo sumo es 2. El de $\overline{A}$ puede ser 3 si su determinate no se anula. Veamos cuando ocurre esto. Tenemos que $|\overline{A}| = a(b-a)(b-1)(b+1)$. Por tanto:

- Si $a \neq 0$, $a \neq b$, $b \neq 1$ y $b \neq -1$ entonces el determinate de $\overline{A}$ es 3 y el sistema es incompatible.

- Si $a = 0$, en la última ecuación queda $0 = 1$ y por tanto el sistema es incompatible.

- Si $a = b$, $a \neq 0$, la primera y segunda ecuación coinciden. Tenemos ahora el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + ay & = & a \\ a^2x + a^2y & = & 1 \end{array} \right.$$

Ahora la matriz asociada al nuevo sistema tiene rango 1. Será compatible cuando coindida con el de la ampliada; en este caso cuando $a^2 = 1$. Así si $a = 1$ o $a = -1$ el sistema tiene solución dependiente de un parámetro $x = 1 - \lambda; y = \lambda$. Mientras que en otro caso el sistema no es compatible.

- Si $b = 1$, $a \neq 0$, $a \neq 1$ la primera y tercera ecuación coinciden. Tenemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + ay & = & 1 \\ x + ay & = & a \end{array} \right.$$

Ahora el sistema es compatible determinado. La solución es $x = -1; y = \dfrac{1+a}{a}$.

- Si $b = -1$, $a \neq 0$, $a \neq -1$, de nuevo la primera y tercera ecuación coinciden. Queda:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + ay & = & -1 \\ -x + ay & = & a \end{array} \right.$$

El sistema es compatible determinado. La solución es $x = \dfrac{-a-1}{a+1}; y = \dfrac{a^2-1}{a^2+a}$

13.– *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar los valores de a y b para los cuales A y B son

En cualquiera de los cuatro casos una condición necesaria (aunque no suficiente) para que cumplan la relación pedida es que tengan el mismo rango, porque todas ellas lo conservan. Tenemos que:

$$rango(B) = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Por tanto A no puede tener rango 2 y su determinante ha de ser nulo:

$$0 = |A| = b - 2a \qquad \Rightarrow \qquad b = 2a.$$

(i) *Equivalentes por filas.*

Son equivalentes por filas si y sólo si tienen la misma forma canónica reducida por filas (escalonada, con los pivotes iguales a uno, y encima y debajo de ellos sólo ceros). Reducimos la matriz B:

$$B \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 2a \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que sean equivalentes por filas ambas formas reducidas han de coincidir, es decir, $a = 1$ y por tanto $b = 2a = 2$.

(ii) *Equivalentes por columnas.*

Lo análogo pero con operaciones elementales columna. Primero la matriz B:

$$B \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 2a \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(-a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las formas canónicas reducidas por columnas difieren: nunca son equivalentes por columnas.

(iii) *Equivalentes.*

Son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango. Vimos que eso ocurre cuando $b = 2a$.

(iv) *Congruentes. En este caso dar además un matriz inversible P tal que $P^tAP = B$.*

Dado que B es simétrica, para que sean congruentes como condición necesaria (aunque no suficiente) A tiene que ser también simétrica y por tanto $a = 2$ y $b = 2a = 4$. Pero para que definitivamente sean congruentes al diagonalizarlas haciendo las mismas operaciones fila y columna tienen que aparecer los mismos signos en la diagonal:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Por tanto son congruentes para $a = 2$ y $b = 4$.

Para hallar la matriz P hacemos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hicimos para pasar de A a R y la inversa y en orden opuesto de las que hicimos para pasar de B a R:

$$Id \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(\mu_{21}(-1))^{-1}=\mu_{21}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

15.– *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ dos matrices. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(ii) *Si A y B son equivalentes por filas y tienen rango m entonces son equivalentes por columnas.*

FALSO. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{H_{12}}{\longrightarrow} B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son matrices 2×1 de rango 1 equivalentes por filas, pero no equivalentes por columnas.

(iii) *Si A y B son equivalentes por filas entonces $A + B$ y $A - B$ son equivalentes por filas.*

FALSO. Por ejemplo si $n = m = 2$ y $A = B = Id$ entonces obviamente A y B son equivalentes por filas por ser la misma matriz, pero $A + B = 2Id$ tiene rango 2 y no puede ser por tanto equivalente por filas a $A - B = 0$ que tiene rango 0, ya que la equivalencia por filas conserva el rango.

(iv) *$rango(AB) = rango(BA)$.*

FALSO. Por ejemplo si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y así $rango(AB) = 1 \neq 0 = rango(BA)$.

16.– *Sea* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:*

(i) *Si* A *es simétrica y no singular, entonces es congruente con* I_n.

FALSO. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es simétrica y no singular (porque tiene determinante no nulo), pero NO es congruente con la identidad porque ya son matrices diagonales y no tienen el mismo número de signos positivos en la diagonal.

(ii) *Si* A *es no singular, entonces es equivalente por columnas a* I_n.

VERDADERO. Si A es no singular, entonces $A \cdot A^{-1} = I_n$, es decir, existe una matriz inversible que multiplicada por la derecha por A da la identidad. Por tanto A es equivalente por columnas a I_n.

(iii) *Todas las matrices de* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *con el mismo rango que* A *son equivalentes a* A.

VERDADERO. Para matrices del mismo tamaño ser equivalente es lo mismo que tener el mismo rango.

(iv) *Si* A *es semejante a* I_n *entonces* $A = I_n$.

VERDADERO. Si A es semejeanta a I_n entonces existe una matriz inversible P tal que $P^{-1}AP = I_n$. Pero entonces, multiplicando por P y P^{-1} respectivamente a izquierda y derecha, a ambos lados de la igualdad:

$$PP^{-1}APP^{-1} = PI_nP^{-1} \quad \Rightarrow \quad A = PP^{-1} = I_n.$$

I.– *Demostrar que las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

son congruentes. Dar una matriz P inversible tal que $B = P^tAP$.

Dos matrices simétricas del mismo tamaño son congruentes si y sólo si al ser diagonalizadas por congruencia (mismas operaciones elementales fila que columna) aparecen los mismos signos en la diagonal.

Diagonalizamos ambas matrices para verificarlo:

$$A \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-2)} \xrightarrow{\mu_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B \xrightarrow{H_{12}} \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

En ambos casos hemos obtenido dos signos positivos y uno negativo en la diagonal, luego si son congruentes.

Para hallar la matriz de paso P completamos la diagonalización de B para llegar exactamente a la misma forma diagonal que en A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3(1/2)} \xrightarrow{\mu_3(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \xrightarrow{\mu_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hemos hecho para pasar de A a su forma diagonal y la inversa (y en orden inverso) de las operaciones columna que hemos hecho para pasar de B a su forma diagonal:

$$Id \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{23}^{-1}=\mu_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\mu_3(1/2)^{-1}=\mu_3(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{32}(-1)^{-1}=\mu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)^{-1}=\mu_{21}(1)} \quad \xrightarrow{\mu_{31}(-1)^{-1}=\mu_{31}(1)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}^{-1}=\mu_{12}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

II.– *Se consideran la matrices:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3\\ 2 & 5 & -1 & 6\\ -1 & 1 & -3 & -3\end{pmatrix}\qquad M=\begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 & m\\ 1-m & m & 0 & 1\\ m-1 & 1 & m & 0\end{pmatrix}$$

Determinar m para que las matrices A y M sean equivalentes.

Dos matrices son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango. Veamos primero cual es el rango de A:

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Vemos que la tercera fila es nula y el menor formado por las dos primeras filas y columnas es no nulo. Por tanto el rango de A es 2. Entonces sólo tenemos que hallar m para que $rango(M)=2$. Una condición necesaria (aunque no sufciente) para que esto ocurra es que algun menor de orden 3 sea nulo. Consideramos el formado por las tres últimas filas y columnas:

$$0=\begin{vmatrix} 0 & 1 & m\\ m & 0 & 1\\ 1 & m & 0\end{vmatrix}\qquad\iff\qquad m^3+1=0\qquad\iff\qquad m=-1.$$

Para $m=-1$ la matriz M queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

La última fila es nula y el menor formado por las dos primeras fila y las columnas dos y tres es no nulo. Por tanto el rango es 2.

En definitiva A y M son equivalentes si $m=-1$.

III.– *Dadas las matrices:*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & k\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Estudiar para que valores de k existe una matriz $X\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ inversible tal que $XA=B$, dando en esos casos la matriz X.

Que exista una matriz inversible X tal que $XA=B$, equivale a que ambas matrices sean equivalentes por filas.

Para analizar si A y B son equivalentes por filas usamos que esto ocurre si y sólo si ambas tienen la misma forma canónica reducida por filas. Comenzaremos entonces calculando la forma canónica reducida por filas de cada una de ellas.

Primero la matriz A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\overset{H_{12}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\overset{H_{12}(-1/2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\overset{H_1(1/2)H_2(1/2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

después la matriz B, en función de k:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & k\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\overset{H_{21}(-1/2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & k\\ 0 & 1 & 1 & 1-k/2\end{pmatrix}\overset{H_1(1/2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k/2\\ 0 & 1 & 1 & 1-k/2\end{pmatrix}$$

Comparando vemos que ambas formas canónicas reducidas por filas coinciden si y sólo si $k=2$.

Para hallar la matriz de paso X hacemos sobre la identidad las mismas operaciones fila que habría que hacer para pasar de A a B. Corresponden a las operaciones fila que hicimos al pasar de A a su forma reducida y después continuar con las operaciones que hicimos sobre B pero invertidas y en orden opuesto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\overset{H_{12}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\overset{H_{12}(-1/2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix} -1/2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\overset{H_1(1/2)H_2(1/2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix} -1/4 & 1/2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\overset{H_1(1/2)^{-1}=H_1(2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix} -1/2 & 1\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}\overset{H_{21}(-1/2)^{-1}=H_{21}(1/2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix} -1/2 & 1\\ 1/4 & 1/2\end{pmatrix}$$

IV.– *Dada la matriz:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$$

(a) *Hallar todos los valores de a, b para los cuáles B diagonaliza por congruencia.*

Para que una matriz cuadrada diagonalice por congruencia la condición necesaria y suficiente es que sea simétrica. Por tanto basta exigir $a = -1$.

(b) *Hallar todos los valores de a, b para los cuáles B es congruente en $\mathbb{R}$ con:*

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Por lo dicho en (a), sabemos que $a = -1$. Además dos matrices diagonales de la misma dimensión son congruentes en $\mathbb{R}$ si y sólo si tienen el mismo número de términos positivos y negativos en la diagonal. Ahora diagonalizamos la matriz B dada, para ver los signos de los términos que aparecen en la diagonal:

$$B \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{\nu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & b \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1/3)}{\longrightarrow}\overset{\nu_{32}(-1/3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & b+1/3 \end{pmatrix}$$

Como la segunda matriz indicada tiene dos números positivos en la diagonal y uno negativo, para que sea congruente a la dada tiene que cumplirse que $b + 1/3 < 0$, es decir, $b < -1/3$.

(c) *Hallar todos los valores de a, b para los cuáles B es congruente en $\mathbb{R}$ con la identidad.*

Por lo visto en el apartado anterior es imposible que B sea congruente en la identidad, porque en su forma diagonal siempre aparece al menos un elemento con signo negativo.

V.– *Dado $k \in \mathbb{R}$, se consideran las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}.$$

Explicar de manera razonada si cada una de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.

i) *Si $k = 1$ son congruentes.*

FALSO. Si $k = 1$ se tiene $rango(A) = 1$, pero $rango(B) = 2$. Dos matrices congruentes debieran de tener el mismo rango.

ii) *Para $k = 2$ son equivalentes por filas.*

FALSO. Para cada una de ellas hallamos la forma reducida por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

No coinciden y por tanto no son equivalentes por filas.

ii) Para $k = 2$ son equivalentes por columnas.

FALSO. Para cada una de ellas hallamos la forma reducida por columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

No coinciden y por tanto no son equivalentes por columnas.

VI.– *Sean las matrices reales:*

$$A=\begin{pmatrix}-1&2\\2&1\\3&-1\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}-1&-3\\1&2\\1&1\end{pmatrix};$$

¿Es posible encontrar una matriz inversible $X\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $AX=B$?.

Multiplicar la matriz A por la derecha por una matriz inversible X consiste en hacer operaciones elementales columna. Por tanto la cuestión es si A y B son equivalentes por columnas. Tenemos:

$$A\overset{\nu_{21}(2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}-1&0\\2&5\\3&5\end{pmatrix}\overset{\nu_1(-1)\nu_2(1/5)}{\longrightarrow\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\\-3&1\end{pmatrix}\overset{\nu_{12}(2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

y por otra parte:

$$B\overset{\nu_1(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&-3\\-1&2\\-1&1\end{pmatrix}\overset{\nu_{21}(3)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\\-1&-2\end{pmatrix}\overset{\nu_{12}(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\1&-2\end{pmatrix}\overset{\nu_1(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{pmatrix}$$

Luego A y B no son equivalentes por columnas.

¿Y una matriz inversible $Y\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $YA=B$?. Razonar las respuestas.

Ahora hay que ver si son equivalentes por filas:

$$A=\begin{pmatrix}-1&2\\2&1\\3&-1\end{pmatrix}\overset{\substack{H_{21}(2)\\H_{31}(3)}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}-1&2\\0&5\\0&5\end{pmatrix}\overset{\substack{H_{32}(-1)\\H_2(1/5)}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\overset{H_{12}(-2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\overset{H_1(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

y para la otra matriz:

$$B=\begin{pmatrix}-1&-3\\1&2\\1&1\end{pmatrix}\overset{\substack{H_{21}(1)\\H_{31}(1)}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}-1&-3\\0&-1\\0&-2\end{pmatrix}\overset{\substack{H_{12}(-3)\\H_{32}(-2)}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\\0&0\end{pmatrix}\overset{\substack{H_1(-1)\\H_2(-1)}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

Luego vemos que son equivalentes filas.

VII.– *Obtener mediante transformaciones elementales y cuando sea posible, la inversa de las matriz:*

$$\begin{pmatrix}a&0&0&\cdots&0&0\\-b&a&0&\cdots&0&0\\0&-b&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&0\\0&0&0&\cdots&-b&a\end{pmatrix}$$

En primer lugar observamos que el determinante de la matriz es a^n. Por tanto la matriz es inversible si y sólo si $a\neq 0$.

Trabajamos bajo el supuesto de que $a\neq 0$. Para hallar la inversa hacemos la reducción por filas hasta llegar a la identidad; la matriz inversa se obtiene realizando las mismas operaciones sobre la matriz identidad. Podemos hacer ambos procesos al mismo tiempo:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}a&0&0&\cdots&0&0&1&0&0&\dots&0&0\\-b&a&0&\cdots&0&0&0&1&0&\dots&0&0\\0&-b&a&\cdots&0&0&0&0&1&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&0&0&0&0&\dots&1&0\\0&0&0&\cdots&-b&a&0&0&0&\dots&0&1\end{array}\right)$$

Sumamos ahora la primera fila multiplicada por b/a a la segunda ; luego la segunda multiplicada por b/a a la tercera y así sucesivamente. Suponiendo que es una matriz $n \times n$, queda:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & b/a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & b^2/a^2 & b/a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & b^{n-2}/a^{n-2} & b^{n-3}/a^{n-3} & b^{n-4}/a^{n-4} & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b^{n-1}/a^{n-1} & b^{n-2}/a^{n-2} & b^{n-3}/a^{n-3} & \dots & b/a & 1 \end{array}\right)$$

y ahora dividiendo cada fila por a:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b/a^2 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & b^2/a^3 & b/a^2 & 1/a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & b^{n-2}/a^{n-1} & b^{n-3}/a^{n-2} & b^{n-4}/a^{n-3} & \dots & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b^{n-1}/a^{n} & b^{n-2}/a^{n-1} & b^{n-3}/a^{n-2} & \dots & b/a^2 & 1/a \end{array}\right)$$

VIII.– *Obtener la forma canónica de la siguiente matriz respecto de la congruencia sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$ *y sobre el cuerpo* $\mathbb{C}$*, así como las matrices de paso:*

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Es una matriz simétrica. Para reducir por congruencia, las operaciones que hagamos por filas las hacemos también a las columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1/3)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{21}(-1/3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{31}(3/2)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{31}(3/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{H_1(1/\sqrt{6})}{\longrightarrow} \overset{\nu_1(1/\sqrt{6})}{\longrightarrow} \overset{H_2(\sqrt{3}/2)}{\longrightarrow} \overset{\nu_2(\sqrt{3}/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta es la forma canónica por congruencia sobre $\mathbb{R}$. En este caso coincide con la forma canónica compleja, porque todos los términos de la diagonal son no negativos. Serían diferente si apareciese algún -1 en la forma canónica en $\mathbb{R}$.

Para calcular la matriz P de paso de manera que $A = PCP^t$, basta hacer las operaciones *por fila* que le hemos hecho a A sobre la identidad. De esta forma obtenemos:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/6 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

IX.– *Sean* $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *dos matrices con el mismo determinante y la misma traza. ¿Es posible que* A *y* B *no sean equivalentes?. ¿Y si además son simétricas?. Razona las respuestas.*

Dos matrices $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango.

Para que NO sean equivalentes puede ocurrir:

i) Que una tenga rango dos y otra no.

Pero entonces no se cumpliría que tienen el mismo determimante (uno sería nulo y el otro no).

ii) Que una tenga rango uno y otra rango cero. Pero entonces la de rango uno tiene que tener traza cero. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \Omega.$$

Luego si puede ocurrir que tengan el mismo determimante y la misma traza, pero no sean equivalentes.

Sin embargo si son simétricas, se tiene que toda matriz simétrica de traza nula es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Si exigimos que su determinante sea además nulo:

$$0 = det(A) = -a^2 - b^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = b = 0.$$

Llegamos a que $A = \Omega$, luego ambas tendrían rango 0.

Por tanto deducimos que dos matrices $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ simétricas y con el mismo determinante y traza siempre son equivalentes.

X.– *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) *Estudiar que parejas de matrices son equivalentes.*

Dos matrices de igual dimensión son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango. Estudiamos el rango de cada una de ellas:

* $det(A) = -1 \neq 0$ por tanto $rango(A) = 2$.

* $det(B) = det(C) = det(D) = 0$ y como ninguna de ellas es la matriz nula, $rango(B) = rango(C) = rango(D) = 1$.

Por tanto B, C, D son equivalentes entres si; pero A no es equivalente ni con B, ni con C, ni con D.

(ii) *Estudiar que parejas de matrices son semejantes.*

Una condición necesaria para que sean semejantes es que tengan el mismo rango. Luego ya sabemos que A no es semejante a ninguna de las otras tres.

Veamos que ocurre con B, C y D. Otra condición necesaria para la semejanza es que las matrices tengan la misma traza. Se tiene que:

$$traza(B) = 8, \quad traza(C) = 8, \quad traza(D) = 2$$

Por tanto D no es semejante ni a B ni a C.

Resta ver que ocurre con las parejas (B, C). Para que sean semejantes deberían de tener los mismos autovalores (es una condición necesaria, aunque no suficiente).

Calculamos los autovalores de B:

$$det(B - \lambda Id) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda(\lambda - 8) = 0.$$

Por tanto sus autovalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 8$ con multiplicidad algebraica 1 (y también geométrica). Deducimos que B diagonaliza por semejanza a una matriz diagonal con autovalores 0 y 8; pero tal matriz es precisamente la matriz C luego son semejantes.

(iii) *Estudiar que parejas de matrices son congruentes, dando para cada una de ellas la correspondiente matriz de paso por congruencia.*

Una condición necesaria para la congruencia es que tengan el mismo rango. Por tanto de nuevo A no es congruente con B, C ó D. Además la congruencia conseva la simetría. Como B no es simétrica y C y D si lo son, la primera tampoco puede ser conguente con las dos últimas. Resta ver que ocurre con C y D: serán congruentes si al diagonalizarlas por congruencia llegamos a la misma signatura:

C ya es diagonal.

La matriz D la diagonalizamos realizando las mismas operaciones por fila que por columna:

$$D \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow} \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_1(\sqrt{8})}{\longrightarrow} \overset{\mu 1(\sqrt{8})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Vemos que las dos tienen signatura $(1,0)$ y por tanto son congruentes. La matriz de paso P tal que $PDP^t = C$ se obtiene haciendo sobre la identidad las mismas operaciones fila que hicimos para llegar de D a C:

$$Id \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_1(\sqrt{8})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P$$

XI.– *Discutir y, en su caso, resolver, en función de los parámetros correspondientes, el sistema de ecuaciones:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + 2z & = & 2 \\ 5x + 2y & = & 1 \\ x - 2y + bz & = & 3 \end{array} \right.$$

Escribimos la matriz asociada al sistema y la ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ x & -2 & b \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ x & -2 & b & 3 \end{pmatrix}$$

Estudiamos los rangos en función de a y b. Tenemos $|A| = 2(12 - ab)$. Luego:

- Si $ab \neq 12$, entonces $rango(A) = rango(\overline{A}) = 3$. Coincide con el número de incógintas por lo que el sistema es compatible determinado.

Resolviéndolo por Kramer se obtiene:

$$x = \frac{2(b-4)}{12 - ab}; \qquad y = \frac{ab - 10b + 28}{24 - 2ab}; \qquad z = \frac{4(a-3)}{12 - ab}.$$

Si $ab = 12$, el rango de A es 2, porque el menor formado por las dos primeras filas y columnas siempre tiene determinante no nulo. El rango de $\overline{A}$, sin embargo, puede ser 3, si hay algún menor de orden 3 que tenga determinante nulo. Vemos que esto ocurre exactamente si $a \neq 3$. Es decir:

- Si $ab = 12$ pero $a \neq 3$, entonces el sistema es incompatible.

- Si $a = 3$ y $b = 4$, el sistema es compatible indeterminado. De las dos primeras ecuaciones se obtiene:

$$x = \frac{2(1-\lambda)}{3}; \qquad y = \frac{-7 + 10\lambda}{6}; \qquad z = \lambda.$$

XII.– *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) *Si $det(A) \neq 0$ y además A y B son equivalentes por filas entonces también son equivalentes por columnas.*

VERDADERO. Si $det(A) \neq 0$ entonces $rango(A) = 2$. Si A y B son equivalentes por filas entonces $rango(B) = rango(A) = 2$ y así B también es inversible. Pero toda matriz inversible es equivalente tanto por filas como por columnas a la identidad. Por tanto A y B son equivalentes por columnas con la identidad y por tanto equivalentes por columnas entre si.

(ii) *Si $det(A) = det(B) = 0$ entonces A y B son equivalentes.*

FALSO. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ambas son de determinante nulo, pero $rango(A) = 0$ y rango $(B) = 1$. Por tanto NO son equivalentes por tener distinto rango.

(iii) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

FALSO. Notamos que:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Para que se diese la igualdad propuesta tendría que cumplirse que $AB = BA$, es decir, que las matrices conmutasen. Pero esto no siempre ocurre. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pero:

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) *Si A y B son congruentes entonces $signo(traza(A)) = signo(traza(B))$.*

FALSO. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

son congruentes porque son diagonales con los mismos signos en la diagonal, pero:

$$signo(traza(A)) = signo(2 - 1) = signo(1) = +1$$
$$signo(traza(B)) = signo(1 - 2) = signo(-1) = -1$$

XIII.– *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, con $det(A) = 1$ y $det(B) = 2$. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *A y B son congruentes.*

FALSO. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ cumplen que $det(A) = 1$, $det(B) = 2$ pero no son congruentes porque son diagonales con distinta signtaura.

(ii) *A y B pueden ser congruentes.*

VERDADERO. Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ cumplen que $det(A) = 1$, $det(B) = 2$ y son congruentes porque son diagonales con la misma signatura.

(iii) *A y B pueden ser semejantes.*

FALSO. Si fuesen semejantes entonces existiría P inversible tal que $A = P^{-1}BP$; pero entonces tendrían el mismo determinante ya que:

$$|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}||B||P| = |P|^{-1}||B||P| = |B|$$

Pero $det(A) = 1 \neq 2 = det(B)$.

(iv) *Si $A = Id$ y $traza(B) = 0$ entonces A y B no son congruentes.*

VERDADERO. Si fuesen congruentes por ser A simétrica entonces también B tendría que ser simétrica. Como además $traza(B) = 0$, B sería de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Pero entonces:

$$det(B) = -a^2 - b^2 \leq 0$$

y no puede ocurrir que $det(B) = 2$.

XIV.– *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ matrices simétricas. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) *Si A y B son congruentes entonces tienen el mismo número de términos positivos y negativos en la diagonal.*

FALSO. Por ejemplo si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = -Id$, ambas tienen dos signos negativos en la diagonal. Sin embargo $det(A) = -3$ y $det(B) = 1$, luego no pueden ser congruentes porque la congruencia conserva el signo del determinante.

(ii) *Si $signo(det(A)) = signo(det(B))$ entonces A y B son congruentes.*

FALSO. Por ejemplo si $A = Id$ y $B = -Id$ ambas tienen determinante positivo. Sin embargo NO son congruentes porque sus **formas diagonales por congruencia** (ya están diagonalizadas) no presentan el mismo número de signos positivos y negativos en la diagonal.

(iii) *$AB - BA$ es una matriz hemisimétrica.*

VERDADERO. Recordemos que una matriz es hemisimétrica si al trasponerla cambia de signo. Pero:

$$(AB - BA)^t = (AB)^t - (BA)^t = B^tA^t - B^tA^t$$

Como A y B son simétricas coinciden con sus traspuestas y queda:

$$(AB - BA)^t = (AB)^t - (BA)^t = B^tA^t - B^tA^t = BA - AB = -(AB - BA).$$

(iv) *AB es una matriz simétrica.*

FALSO. Por ejemplo si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ambas son simétricas, pero:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

que NO es simétrica.
