1.– *Hallar la forma reducida equivalente por filas de la matriz:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{H_{21}(-3)\\ H_{31}(-2)\\ H_{41}(-5)\\ H_{51}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{H_{12}(-2)\\ H_{32}(5)\\ H_{42}(4)\\ H_{52}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3(\frac{-1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{H_{13}(-5)\\ H_{23}(2)\\ H_{43}(10)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.– *Obtener mediante transformaciones elementales el rango, la forma canónica B respecto de la equivalencia y matrices no singulares P y Q que cumplan $B = PAQ$, siendo A cada una de las matrices del problema anterior.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\nu_{41}(-1)\\ \nu_{42}(1)\\ \nu_{43}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que tiene rango 3. Como en el apartado anterior, calculamos las matrices P y Q de paso realizando las operaciones elementales sobre la matriz identidad (¡OJO!, la identidad de orden igual al número de filas para la matriz P y de orden igual al número de columnas para la matriz Q).

Para la matriz P, que es la matriz de paso por filas, realizamos sobre la identidad las mismas operaciones files que hemos hecho en el ejercicio 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{H_{21}(-3)\\ H_{31}(-2)\\ H_{41}(-5)\\ H_{51}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{H_{12}(-2)\\ H_{32}(5)\\ H_{42}(4)\\ H_{52}(-1)}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -4 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3(\frac{-1}{10})}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 7/10 & -1/2 & 2/5 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{H_{13}(-5)\\ H_{23}(2)\\ H_{43}(10)}} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 0 & -1/5 & 0 & 0 \\ 7/10 & -1/2 & 2/5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para la matriz Q, que es la matriz de paso por columnas, realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columnas que hemos hecho antes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\nu_{41}(-1)\\ \nu_{42}(1)\\ \nu_{43}(-1)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos:

$$P = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 0 & -1/5 & 0 & 0 \\ 7/10 & -1/2 & 2/5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.– *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) *Hallar (si existe) una matriz inversible* X *tal que* $XA = B$.

La existencia de X en las condiciones indicadas corresponde al hecho de que A y B sean equivalentes por filas, siendo X la matriz de paso.

Para analizar si son equivalente por filas hallamos y comparamos las formas canónicas reducidas por filas de cada una de ellas:

$$A \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{23}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$B \overset{H_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que las formas canónicas reducidas por filas NO coinciden, por tanto NO son equivalentes por filas y no existe la matriz X pedida.

(ii) *Hallar (si existe) una matriz inversible* Y *tal que* $AY = B$.

Ahora la matriz Y multiplica por la derecha. El problema es análogo al del apartado anterior pero ahora con equivalencia por columnas.

Analizamos las formas canónicas reducidas por columnas de ambas.

$$A \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{41}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mu_{12}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{42}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mu_{13}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$B \overset{\mu_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos la misma forma reducida; por tanto si son equivalentes por columnas y existe la matriz Y pedida. Para calcularla hacemos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hicimos sobre

A y despueés la inversa y en orden inverso de las que hicimos sobre B:

$$Id \overset{\mu_{21}(-1)\mu_{41}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{12}(-1)\mu_{32}(-1)\mu_{42}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{13}(-1)}{\longrightarrow}$$

$$\overset{\mu_{13}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{12}^{-1}=\mu_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) *¿Son A y B matrices equivalentes?.*

Si; acabamos de ver que son equivalentes por columna y por tanto son equivalentes.

(iv) *Estudiar si AA^t y BB^t son congruentes.*

Tenemos:

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad BB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Id$$

Son dos matrices simétricas. Son congruentes si al diagonalizarlas por congruencia (mismas operaciones fila y columna) se obtienen matrices con los mismos signos en la diagonal. La matriz BB^t ya está diagonalizada: es la identidad con tres signos positivos en la diagonal.

Veamos que ocurre con AA^t:

$$AA^t \overset{H_{21}(-5/3)H_{31}(-1)\mu_{21}(-5/3)\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{23}\ \mu_{23}}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/3 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1)\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Vemos que en la forma diagonalizada también aparecen tres signos positivos. Por tanto AA^t y BB^t SI son congruentes.

5.– *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$.

(i) *Estudiar para que valores de a, b, c las matrices A y B son congruentes.*

En primer lugar recordemos que la congruencia conserva la simetría. Dado que la matriz A es simétrica, para que B sea congruente con ella también ha de ser simétrica y así necesariamente $b = 2$.

Ahora dos matrices simétricas con coeficientes reales son congruentes si y sólo si al ser diagonalizacas por congruencia en la forma diagonal de ambas aparecen exactamente el mismo número de signos positivos y negativos.

Comenzamos diagonalizando por congruencia la matriz A, es decir mediante operaciones elementales fila y exactamente las mismas en columna:

$$A \overset{H_{21}(-1)H_{31}(-1)\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}\ \mu_{32}}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(1)\mu_{32}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

Por tanto los signos de la forma diagonal de A son $\begin{cases} (+,+,+) \text{ si } a > 2 \\ (+,+,0) \text{ si } a = 2 \\ (+,+,-) \text{ si } a < 2 \end{cases}$

Ahora diagonalizamos la matriz B:

$$B \overset{H_{21}(-2)H_{31}(-1)\mu_{21}(-2)\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & c-1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(1)\mu_{32}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c-2 \end{pmatrix}$$

Los signos de la forma diagonal de C son $\begin{cases} (+,+,+) \text{ si } c > 2 \\ (+,+,0) \text{ si } c = 2 \\ (+,+,-) \text{ si } c < 2 \end{cases}$.

Concluimos que son congruentes si y sólo si $b = 2$ y, $a, c > 2$ ó $a, c = 2$ ó $a, c < 2$. Dicho de otra manera son congruentes si y sólo si $b = 2$ y $signo(a-2) = signo(c-2)$.

(ii) *Estudiar para que valores de a existe una matriz inversible P tal que $PAP^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. En tales casos calcular P.*

La transformación PAP^t corresponde a la relación de congruencia.

La matriz indicada ya es diagonal y salvo orden los signos que aparecen en la misma son $(+,+,0)$. Vimos en el apartado anterior que en la forma diagonal de A esos signos aparecen si y sólo si $a - 2 = 0$, es decir, si $a = 2$.

Para hallar la matriz P primero seguimos modificando por congruencia la forma diagonal de A hasta llegar exactamente a la diagonal indicada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{13}\ \mu_{13}}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_3(2)\mu_3(2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz P es la que refleja las operaciones fila que hay que hacer para transformar A en la diagonal. Para hallarla realizamos sobre la identidad las operaciones fila hechas en el proceso de diagonalización:

$$Id \overset{H_{21}(-1)H_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{H_{13}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_3(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

6.– *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hallar una matriz $X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ verificando $XAX^t = B$.

La relación $XAX^t = B$ significa que A y B son congruentes, es decir, que podemos pasar de una la otra haciendo operaciones elementales fila y exactamente las mismas en columna.

Para calcular la matriz X, realizaremos sobre la identidad las mismas operacioens fila que en el paso de A a B.

$$A \overset{H_{12}\ \mu_{12}}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{23}\ \mu_{23}}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{H_{32}(-3)\mu_{32}(-3)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \overset{H_1(2)\mu_1(2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \overset{H_{23}\ \mu_{23}}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Hacemos sobre la identidad las operaciones fila:

$$Id \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{32}(-3)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(2)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = X$$

7.– *Sean las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Estudiar para que valores de* a *existe una matriz* $X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *inversible tal que* $XA = B$. *En esos casos dar una matriz* X *verificando la ecuación.*

La existencia de una matrix inversible $X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $XA = B$ corresponde al hecho de que A y B sean equivalentes por filas. Para analizar cuando lo son, calculamos y comparamos la forma canónica reducida por filas de cada una de ellas (escalonada, con el primer elemento no nulo de cada fila igual a 1 y encima y debajo de él ceros):

$$A \xrightarrow{H_{21}(-2)}\xrightarrow{H_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \xrightarrow{H_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que para que ambas formas reducidas coincidan necesariamente $a = 2$; es decir, la matriz X bajo las condiciones indicadas por el enunciado sólo existe si $a = 2$.

Para calcularla hacemos sobre la identidad las mismas operaciones que hemos hecho desde A hasta su forma reducida y luego las opuestas y en orden inverso a las hechas desde B para llegar a su forma reducida:

$$Id \xrightarrow{H_{21}(-2)}\xrightarrow{H_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}(-2)} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(H_{12}(-1))^{-1}=H_{12}(1)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(H_{31}(-2))^{-1}=H_{31}(2)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = X$$

8.– *Sean* $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(i) *Hallar los valores de* a *para que* X *e* Y *sean equivalentes por filas.*

Para que sean equivalentes por filas tienen que tener la misma forma canónica reducida por filas.

Comenzamos con la matriz X:

$$X \xrightarrow{H_{21}(-1)}\xrightarrow{H_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}(-1)}\xrightarrow{H_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz Y:

$$Y \overset{H_1(1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)H_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & a \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{H_3(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & a \end{pmatrix} \overset{H_{12}(-1)H_{32}(2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

Vemos que para que las formas reducidas coincidan tiene que cumplirse que $a+2=0$, es decir $a=-2$.

(ii) *Hallar los valores de a para que X e Y sean equivalentes por columnas.*

Ahora comparamos las formas reducidas por columnas. Para la matriz X:

$$X \overset{\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{12}(-1)\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para la matriz Y:

$$Y \overset{\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & a \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\mu_{12}(1)\mu_{42}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & a+2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mu_1(1/2)\mu_2(-1/2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos (nos fijamos en la primera columna) que la forma reducida de Y por columnas no coincide con la de X para ningún valor de a.

10.– *Obtener mediante transformaciones elementales las inversas de las siguientes matrices:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la inversa hacemos la reducción por filas hasta llegar a la identidad; la matriz inversa se obtiene realizando las mismas operaciones sobre la matriz identidad. Podemos hacer ambos procesos al mismo tiempo:

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{H_{21}(-1) \\ H_{31}(-1)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{H_2(-1/2) \\ H_3(1/3)}}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \overset{H_{12}(-1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{H_{13}(-3/2) \\ H_{23}(1/2)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/6 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

11.– *Discutir y, en su caso, resolver, en función del parámetro o parámetros correspondientes, los siguientes sistemas de ecuaciones:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z &=& 1 \\ x+ay+z &=& a \\ x+y+az &=& a^2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} ax+ay &=& b \\ bx+ay &=& a \\ abx+aby &=& 1 \end{array}\right.$$

(a) Escribimos la matriz asociada al sistema y la ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad \overline{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

Entonces $|A| = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$. Por tanto:

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ el rango de A es 3 y coincide con el rango de $\overline{A}$ y con el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x = \frac{-a-1}{a+2}; \qquad y = \frac{1}{a+2}; \qquad z = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

Si $a = -2$ ó $a = 1$ estudiamos el rango de la matriz ampliada. En particular:

- Si $a = 1$ vemos que las tres ecuaciones son en realidad la misma. Es decir el rango de A y de $\overline{A}$ es 1. El sistema es compatible indeterminado. La solución depende de dos parámetros:

$$x = 1-\lambda-\mu; \qquad y = \lambda; \qquad z = \mu$$

- Si $a = -2$, vemos que el rango de $\overline{A}$ es 3, ya que el menor formado por las columnas $2, 3, 4$ tiene determinante no nulo. Por tanto, como A es en este caso tiene rango 2, el sistema es incomptaible.

(b) Escribimos la matriz asociada al sistema y la ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} a & a \\ b & a \\ ab & ab \end{pmatrix} \qquad \overline{A}=\begin{pmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ ab & ab & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A, a lo sumo es 2. El de $\overline{A}$ puede ser 3 si su determinate no se anula. Veamos cuando ocurre esto. Tenemos que $|\overline{A}| = a(b-a)(b-1)(b+1)$. Por tanto:

- Si $a \neq 0$, $a \neq b$, $b \neq 1$ y $b \neq -1$ entonces el determinate de $\overline{A}$ es 3 y el sistema es incompatible.

- Si $a = 0$, en la última ecuación queda $0 = 1$ y por tanto el sistema es incompatible.

- Si $a = b$, $a \neq 0$, la primera y segunda ecuación coinciden. Tenemos ahora el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+ay &=& a \\ a^2x+a^2y &=& 1 \end{array}\right.$$

Ahora la matriz asociada al nuevo sistema tiene rango 1. Será compatible cuando coindida con el de la ampliada; en este caso cuando $a^2 = 1$. Así si $a = 1$ o $a = -1$ el sistema tiene solución dependiente de un parámetro $x = 1-\lambda; y = \lambda$. Mientras que en otro caso el sistema no es compatible.

- Si $b = 1$, $a \neq 0$, $a \neq 1$ la primera y tercera ecuación coinciden. Tenemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+ay &=& 1 \\ x+ay &=& a \end{array}\right.$$

Ahora el sistema es compatible determinado. La solución es $x = -1; y = \dfrac{1+a}{a}$.

- Si $b = -1$, $a \neq 0$, $a \neq -1$, de nuevo la primera y tercera ecuación coinciden. Queda:

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+ay &=& -1 \\ -x+ay &=& a \end{array}\right.$$

El sistema es compatible determinado. La solución es $x = \dfrac{-a-1}{a+1}; y = \dfrac{a^2-1}{a^2+a}$

12.– *Encontrar un sistema de ecuaciones cuya solución sea la siguiente:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^1 & = & 2\lambda-\nu \\ x^2 & = & \lambda-2\nu+\delta \\ x^3 & = & -\lambda+\nu-2\delta \\ x^4 & = & \lambda+2\delta \qquad\qquad (\lambda,\ \nu,\ \delta\in\mathbb{R}) \end{array}\right.$$

Se trata de eliminar los parámetros. Una forma de hacerlo es resolver el sistema formado por las tres primeras ecuaciones, considerando como incógnitas λ,μ,δ y sustituir en la cuarta las soluciones. De esta forma obtenemos:

$$\lambda=\frac{3x^1-2x^2-x^3}{5};\quad \mu=\frac{x^1-4x^2-2x^3}{5};\quad \delta=\frac{-x^1-x^2-3x^3}{5}$$

y la ecuación:

$$x^1-4x^2-7x^3-5x^4=0$$

14.– *Dar un ejemplo de tres matrices $A,B,C\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ simétricas, inversibles y no diagonales, de manera que A y B sean congruentes, pero C no sea congruente con A. Justificar la respuesta.*

Dos matrices simétricas reales son congruentes si y sólo si una se obtiene de la otra multiplicando a un lado por una matriz inversible y al otro por su traspuesta; equivalentemente si se pasa de una a la otra haciendo operaciones elementales fila y exactamente las mismas en columna; equivalentemente si al ser diagonalizadas por congruencia se obtienen el mismo número de signos positivos y negativos en la diagonal. Además la congruencia conserva el rango.

Entonces para construir A y B congruentes partimos de la identidad (que es inversible y por tanto también lo será cualquier matriz congruente con ella) y realizamos operaciones elementales fila y las mismas en columna de dos maneras diferentes:

$$Id \overset{H_{21}(1)\mu_{21}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

$$Id \overset{H_{31}(1)\mu_{31}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

Para construir una matriz C no congruente con las anteriores e inversibles partimos de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y realizamos una operación fila y la misma en columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1)\mu_{21}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = C.$$

15.– *Sean $A,B\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ dos matrices. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $rango(A)+rango(B)=199$ entonces A y B no son equivalentes por filas.*

VERDADERO. Por reducción al absurdo. Si fuesen equivalentes por filas entonces tienen el mismo rango y:

$$rango(A)+rango(B)=rango(A)+rango(A)=2rango(A)$$

y por tanto es imposible que la suma sea 199 impar.

(ii) *Si A y B son equivalentes por filas y tienen rango m entonces son equivalentes por columnas.*

FALSO. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son matrices 2×1 de rango 1 equivalentes por filas, pero no equivalentes por columnas.

(iii) *Si A y B son equivalentes por filas entonces $A+B$ y $A-B$ son equivalentes por filas.*

FALSO. Por ejemplo si $n = m = 2$ y $A = B = Id$ entonces obviamente A y B son equivalentes por filas por ser la misma matriz, pero $A + B = 2Id$ tiene rango 2 y no puede ser por tanto equivalente por filas a $A - B = 0$ que tiene rango 0, ya que la equivalencia por filas conserva el rango.

(iv) $rango(AB) = rango(BA)$.

FALSO. Por ejemplo si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y así $rango(AB) = 1 \neq 0 = rango(BA)$.

16.– *Sean $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ dos matrices. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:*

(i) *Si $rango(A) = n$ entonces $m \geq n$.*

VERDADERO. El rango de una matriz equivale al número de filas y columnas independientes de la misma. En otras palabras si el rango es n la matriz tiene n columnas independientes. Por tanto al menos ha de tener m columnas, es decir, $m \geq n$.

(ii) *Si $rango(A) = 1$ entonces A tiene todas las filas nulas menos una.*

FALSO. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 1 porque las dos filas son iguales, pero no tiene todas las filas nulas menos una.

(iii) *Si $n = m$ entonces $rango(A^2) = rango(A)$.*

FALSO. Por ejemplo si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, es claro que $rango(A) = 1$. Sin embargo $A^2 = 0$ y $rango(A^2) = 0$.

(iv) *Si B es inversible, $rango(AB^t) = rango(A)$.*

VERDADERO. Si B es inversible, entonces su traspuesta también lo es. Multiplicar a la derecha por una matriz inversible conserva rango, ya que equivale a hacer opeaciones elementales columna y las operaciones elementales conservan el rango.

I.– *Demostrar que las matrices:*

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}\ y\ B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&4\end{pmatrix},$$

son congruentes. Dar una matriz P inversible tal que $B=P^tAP$.

Dos matrices simétricas del mismo tamaño son congruentes si y sólo si al ser diagonalizadas por congruencia (mismas operaciones elementales fila que columna) aparecen los mismos signos en la diagonal.

Diagonalizamos ambas matrices para verificarlo:

$$A\overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}\overset{H_{32}(-2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(-2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$B\overset{H_{12}}{\longrightarrow}\overset{\mu_{12}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&4\end{pmatrix}\overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}\overset{H_{32}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

En ambos casos hemos obtenido dos signos positivos y uno negativo en la diagonal, luego si son congruentes.

Para hallar la matriz de paso P completamos la diagonalización de B para llegar exactamente a la misma forma diagonal que en A:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\overset{H_3(1/2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_3(1/2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{H_{23}}{\longrightarrow}\overset{\mu_{23}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Ahora realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hemos hecho para pasar de A a su forma diagonal y la inversa (y en orden inverso) de las operaciones columna que hemos hecho para pasar de B a su forma diagonal:

$$Id\overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{\mu_{32}(-2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{\mu_{23}^{-1}=\mu_{23}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&1\\0&1&0\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\overset{\mu_3(1/2)^{-1}=\mu_3(2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-2&2\\0&1&0\end{pmatrix}\overset{\mu_{32}(-1)^{-1}=\mu_{32}(1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\overset{\mu_{21}(-1)^{-1}=\mu_{21}(1)}{\longrightarrow}\quad\overset{\mu_{31}(-1)^{-1}=\mu_{31}(1)}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\overset{\mu_{12}^{-1}=\mu_{12}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=P$$

III.– *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiar para que valores de k existe una matriz $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ inversible tal que $XA = B$, dando en esos casos la matriz X.

Que exista una matriz inversible X tal que $XA = B$, equivale a que ambas matrices sean equivalentes por filas.

Para analizar si A y B son equivalentes por filas usamos que esto ocurre si y sólo si ambas tienen la misma forma canónica reducida por filas. Comenzaremos entonces calculando la forma canónica reducida por filas de cada una de ellas.

Primero la matriz A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}(-1/2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(1/2)} \xrightarrow{H_2(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

después la matriz B, en función de k:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1/2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 & 1-k/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1-k/2 \end{pmatrix}$$

Comparando vemos que ambas formas canónicas reducidas por filas coinciden si y sólo si $k = 2$.

Para hallar la matriz de paso X hacemos sobre la identidad las mismas operaciones fila que habría que hacer para pasar de A a B. Corresponden a las operaciones fila que hicimos al pasar de A a su forma reducida y después continuar con las operaciones que hicimos sobre B pero invertidas y en orden opuesto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}(-1/2)} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(1/2)} \xrightarrow{H_2(1/2)} \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_1(1/2)^{-1}=H_1(2)} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1/2)^{-1}=H_{21}(1/2)} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

IV.– *Dada la matriz:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$$

(a) *Hallar todos los valores de a, b para los cuáles B diagonaliza por congruencia.*

Para que una matriz cuadrada diagonalice por congruencia la condición necesaria y suficiente es que sea simétrica. Por tanto basta exigir $a = -1$.

(b) *Hallar todos los valores de a, b para los cuáles B es congruente en $\mathbb{R}$ con:*

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Por lo dicho en (a), sabemos que $a = -1$. Además dos matrices diagonales de la misma dimensión son congruentes en $\mathbb{R}$ si y sólo si tienen el mismo número de términos positivos y negativos en la diagonal. Ahora diagonalizamos la matriz B dada, para ver los signos de los términos que aparecen en la diagonal:

$$B \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{\nu_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1/3)} \xrightarrow{\nu_{32}(-1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & b+1/3 \end{pmatrix}$$

Como la segunda matriz indicada tiene dos números positivos en la diagonal y uno negativo, para que sea congruente a la dada tiene que cumplirse que $b + 1/3 < 0$, es decir, $b < -1/3$.

(c) *Hallar todos los valores de a, b para los cuáles B es congruente en $\mathbb{R}$ con la identidad.*

Por lo visto en el apartado anterior es imposible que B sea congruente en la identidad, porque en su forma diagonal siempre aparece al menos un elemento con signo negativo.

V.– *Dado $k \in \mathbb{R}$, se consideran las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}.$$

Explicar de manera razonada si cada una de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.

i) *Si $k = 1$ son congruentes.*

FALSO. Si $k = 1$ se tiene $rango(A) = 1$, pero $rango(B) = 2$. Dos matrices congruentes debieran de tener el mismo rango.

ii) *Para $k = 2$ son equivalentes por filas.*

FALSO. Para cada una de ellas hallamos la forma reducida por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

No coinciden y por tanto no son equivalentes por filas.

ii) Para $k = 2$ son equivalentes por columnas.

FALSO. Para cada una de ellas hallamos la forma reducida por columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

No coinciden y por tanto no son equivalentes por columnas.

VI.– *Sean las matrices reales:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

¿Es posible encontrar una matriz inversible $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $AX = B$?.

Multiplicar la matriz A por la derecha por una matriz inversible X consiste en hacer operaciones elementales columna. Por tanto la cuestión es si A y B son equivalentes por columnas. Tenemos:

$$A \overset{\nu_{21}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{\nu_1(-1)}{\longrightarrow}\overset{\nu_2(1/5)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \overset{\nu_{12}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y por otra parte:

$$B \overset{\nu_1(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\nu_{21}(3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\nu_{12}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\nu_1(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego A y B no son equivalentes por columnas.

¿Y una matriz inversible $Y \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $YA = B$?. Razonar las respuestas.

Ahora hay que ver si son equivalentes por filas:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{H_{21}(2) \\ H_{31}(3)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{H_{32}(-1) \\ H_2(1/5)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_1(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y para la otra matriz:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{H_{21}(1) \\ H_{31}(1)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{H_{12}(-3) \\ H_{32}(-2)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{H_1(-1) \\ H_2(-1)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego vemos que son equivalentes filas.

VII.– *Obtener mediante transformaciones elementales y cuando sea posible, la inversa de las matriz:*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & a \end{pmatrix}$$

En primer lugar observamos que el determinante de la matriz es a^n. Por tanto la matriz es inversible si y sólo si $a \neq 0$.

Trabajamos bajo el supuesto de que $a \neq 0$. Para hallar la inversa hacemos la reducción por filas hasta llegar a la identidad; la matriz inversa se obtiene realizando las mismas operaciones sobre la matriz identidad. Podemos hacer ambos procesos al mismo tiempo:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & a & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sumamos ahora la primera fila multiplicada por b/a a la segunda ; luego la segunda multiplicada por b/a a la tercera y así sucesivamente. Suponiendo que es una matriz $n \times n$, queda:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \ldots & 0 & 0 & b/a & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \ldots & 0 & 0 & b^2/a^2 & b/a & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 0 & b^{n-2}/a^{n-2} & b^{n-3}/a^{n-3} & b^{n-4}/a^{n-4} & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a & b^{n-1}/a^{n-1} & b^{n-2}/a^{n-2} & b^{n-3}/a^{n-3} & \ldots & b/a & 1 \end{array}\right)$$

y ahora dividiendo cada fila por a:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1/a & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b/a^2 & 1/a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & b^2/a^3 & b/a^2 & 1/a & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & b^{n-2}/a^{n-1} & b^{n-3}/a^{n-2} & b^{n-4}/a^{n-3} & \ldots & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & b^{n-1}/a^n & b^{n-2}/a^{n-1} & b^{n-3}/a^{n-2} & \ldots & b/a^2 & 1/a \end{array}\right)$$

VIII.– *Obtener la forma canónica de la siguiente matriz respecto de la congruencia sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$ *y sobre el cuerpo* $\mathbb{C}$*, así como las matrices de paso:*

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Es una matriz simétrica. Para reducir por congruencia, las operaciones que hagamos por filas las hacemos también a las columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\longrightarrow}{H_{21}(-1/3)} \underset{\longrightarrow}{\nu_{21}(-1/3)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\longrightarrow}{H_{31}(3/2)} \underset{\longrightarrow}{\nu_{31}(3/2)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\longrightarrow}{H_1(1/\sqrt{6})} \underset{\longrightarrow}{\nu_1(1/\sqrt{6})} \underset{\longrightarrow}{H_2(\sqrt{3}/2)} \underset{\longrightarrow}{\nu_2(\sqrt{3}/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta es la forma canónica por congruencia sobre $\mathbb{R}$. En este caso coincide con la forma canónica compleja, porque todos los términos de la diagonal son no negativos. Serían diferente si apareciese algún -1 en la forma canónica en $\mathbb{R}$.

Para calcular la matriz P de paso de manera que $A = PCP^t$, basta hacer las operaciones *por fila* que le hemos hecho a A sobre la identidad. De esta forma obtenemos:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/6 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

IX.– *Sean* $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *dos matrices con el mismo determinante y la misma traza. ¿Es posible que* A *y* B *no sean equivalentes?. ¿Y si además son simétricas?. Razona las respuestas.*

Dos matrices $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango.

Para que NO sean equivalentes puede ocurrir:

i) Que una tenga rango dos y otra no.

Pero entonces no se cumpliría que tienen el mismo determimante (uno sería nulo y el otro no).

ii) Que una tenga rango uno y otra rango cero. Pero entonces la de rango uno tiene que tener traza cero. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \Omega.$$

Luego si puede ocurrir que tengan el mismo determimante y la misma traza, pero no sean equivalentes.

Sin embargo si son simétricas, se tiene que toda matriz simétrica de traza nula es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Si exigimos que su determinante sea además nulo:

$$0 = det(A) = -a^2 - b^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = b = 0.$$

Llegamos a que $A = \Omega$, luego ambas tendrían rango 0.

Por tanto deducimos que dos matrices $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ simétricas y con el mismo determinante y traza siempre son equivalentes.

X.– *Dadas las matrices:*

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}8&0\\0&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

(i) *Estudiar que parejas de matrices son equivalentes.*

Dos matrices de igual dimensión son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango. Estudiamos el rango de cada una de ellas:

* $det(A)=-1\neq 0$ por tanto $rango(A)=2$.

* $det(B)=det(C)=det(D)=0$ y como ninguna de ellas es la matriz nula, $rango(B)=rango(C)=rango(D)=1$.

Por tanto B,C,D son equivalentes entres si; pero A no es equivalente ni con B, ni con C, ni con D.

(ii) *Estudiar que parejas de matrices son semejantes.*

Una condición necesaria para que sean semejantes es que tengan el mismo rango. Luego ya sabemos que A no es semejante a ninguna de las otras tres.

Veamos que ocurre con B, C y D. Otra condición necesaria para la semejanza es que las matrices tengan la misma traza. Se tiene que:

$$traza(B)=8,\quad traza(C)=8,\quad traza(D)=2$$

Por tanto D no es semejante ni a B ni a C.

Resta ver que ocurre con las parejas (B,C). Para que sean semejantes deberían de tener los mismos autovalores (es una condición necesaria, aunque no suficiente).

Calculamos los autovalores de B:

$$det(B-\lambda Id)=0 \quad\iff\quad \lambda(\lambda-8)=0.$$

Por tanto sus autovalores son $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=8$ con multiplicidad algebraica 1 (y también geométrica). Deducimos que B diagonaliza por semejanza a una matriz diagonal con autovalores 0 y 8; pero tal matriz es precisamente la matriz C luego son semejantes.

XI.– *Discutir y, en su caso, resolver, en función de los parámetros correspondientes, el sistema de ecuaciones:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+2z&=&2\\ 5x+2y&=&1\\ x-2y+bz&=&3\end{array}\right.$$

Escribimos la matriz asociada al sistema y la ampliada:

$$A=\begin{pmatrix}a&2&0\\5&2&0\\x&-2&b\end{pmatrix}\qquad \overline{A}=\begin{pmatrix}a&2&0&2\\5&2&0&1\\x&-2&b&3\end{pmatrix}$$

Estudiamos los rangos en función de a y b. Tenemos $|A|=2(12-ab)$. Luego:

- Si $ab\neq 12$, entonces $rango(A)=rango(\overline{A})=3$. Coincide con el número de incógintas por lo que el sistema es compatible determinado.

Resolviéndolo por Kramer se obtiene:

$$x=\frac{2(b-4)}{12-ab};\qquad y=\frac{ab-10b+28}{24-2ab};\qquad z=\frac{4(a-3)}{12-ab}.$$

Si $ab = 12$, el rango de A es 2, porque el menor formado por las dos primeras filas y columnas siempre tiene determinante no nulo. El rango de $\overline{A}$, sin embargo, puede ser 3, si hay algún menor de orden 3 que tenga determinante nulo. Vemos que esto ocurre exactamente si $a \neq 3$. Es decir:

- Si $ab = 12$ pero $a \neq 3$, entonces el sistema es incompatible.

- Si $a = 3$ y $b = 4$, el sistema es compatible indeterminado. De las dos primeras ecuaciones se obtiene:

$$x = \frac{2(1-\lambda)}{3}; \qquad y = \frac{-7+10\lambda}{6}; \qquad z = \lambda.$$

XII.– *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) *Si $det(A) \neq 0$ y además A y B son equivalentes por filas entonces también son equivalentes por columnas.*

VERDADERO. Si $det(A) \neq 0$ entonces $rango(A) = 2$. Si A y B son equivalentes por filas entonces $rango(B) = rango(A) = 2$ y así B también es inversible. Pero toda matriz inversible es equivalente tanto por filas como por columnas a la identidad. Por tanto A y B son equivalentes por columnas con la identidad y por tanto equivalentes por columnas entre si.

(ii) *Si $det(A) = det(B) = 0$ entonces A y B son equivalentes.*

FALSO. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ambas son de determinante nulo, pero $rango(A) = 0$ y rango $(B) = 1$. Por tanto NO son equivalentes por tener distinto rango.

(iii) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

FALSO. Notamos que:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Para que se diese la igualdad propuesta tendría que cumplirse que $AB = BA$, es decir, que las matrices conmutasen. Pero esto no siempre ocurre. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pero:

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) *Si A y B son congruentes entonces $signo(traza(A)) = signo(traza(B))$.*

FALSO. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

son congruentes porque son diagonales con los mismos signos en la diagonal, pero:

$$signo(traza(A)) = signo(2-1) = signo(1) = +1$$
$$signo(traza(B)) = signo(1-2) = signo(-1) = -1$$

XIII.– *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, con $det(A) = 1$ y $det(B) = 2$. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *A y B son congruentes.*

FALSO. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ cumplen que $det(A) = 1$, $det(B) = 2$ pero no son congruentes porque son diagonales con distinta signtaura.

(ii) *A y B pueden ser congruentes.*

VERDADERO. Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ cumplen que $det(A) = 1$, $det(B) = 2$ y son congruentes porque son diagonales con la misma signatura.

(iii) *A y B pueden ser semejantes.*

FALSO. Si fuesen semejantes entonces existiría P inversible tal que $A = P^{-1}BP$; pero entonces tendrían el mismo determinante ya que:

$$|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}||B||P| = |P|^{-1}||B||P| = |B|$$

Pero $det(A) = 1 \neq 2 = det(B)$.

(iv) *Si $A = Id$ y $traza(B) = 0$ entonces A y B no son congruentes.*

VERDADERO. Si fuesen congruentes por ser A simétrica entonces también B tendría que ser simétrica. Como además $traza(B) = 0$, B sería de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Pero entonces:

$$det(B) = -a^2 - b^2 \leq 0$$

y no puede ocurrir que $det(B) = 2$.

XIV.– *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ matrices simétricas. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) *Si A y B son congruentes entonces tienen el mismo número de términos positivos y negativos en la diagonal.*

FALSO. Por ejemplo si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = -Id$, ambas tienen dos signos negativos en la diagonal. Sin embargo $det(A) = -3$ y $det(B) = 1$, luego no pueden ser congruentes porque la congruencia conserva el signo del determinante.

(ii) *Si $signo(det(A)) = signo(det(B))$ entonces A y B son congruentes.*

FALSO. Por ejemplo si $A = Id$ y $B = -Id$ ambas tienen determinante positivo. Sin embargo NO son congruentes porque sus **formas diagonales por congruencia** (ya están diagonalizadas) no presentan el mismo número de signos positivos y negativos en la diagonal.

(iii) *$AB - BA$ es una matriz hemisimétrica.*

VERDADERO. Recordemos que una matriz es hemisimétrica si al trasponerla cambia de signo. Pero:

$$(AB - BA)^t = (AB)^t - (BA)^t = B^tA^t - B^tA^t$$

Como A y B son simétricas coinciden con sus traspuestas y queda:

$$(AB - BA)^t = (AB)^t - (BA)^t = B^tA^t - B^tA^t = BA - AB = -(AB - BA).$$

(iv) *AB es una matriz simétrica.*

FALSO. Por ejemplo si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ambas son simétricas, pero:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

que NO es simétrica.