

1.— Hallar la forma reducida equivalente por filas de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} H_{21}(-3) \\ H_{31}(-2) \\ H_{41}(-5) \\ H_{51}(-1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} H_{12}(-2) \\ H_{32}(5) \\ H_{42}(4) \\ H_{52}(-1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3\left(\frac{-1}{10}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} H_{13}(-5) \\ H_{23}(2) \\ H_{43}(10) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.— Obtener mediante transformaciones elementales el rango, la forma canónica B respecto de la equivalencia y matrices no singulares P y Q que cumplan $B = PAQ$, siendo A cada una de las matrices del problema anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \nu_{41}(-1) \\ \nu_{42}(1) \\ \nu_{43}(-1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que tiene rango 3. Como en el apartado anterior, calculamos las matrices P y Q de paso realizando las operaciones elementales sobre la matriz identidad (¡OJO!, la identidad de orden igual al número de filas para la matriz P y de orden igual al número de columnas para la matriz Q).

Para la matriz P , que es la matriz de paso por filas, realizamos sobre la identidad las mismas operaciones files que hemos hecho en el ejercicio 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} H_{21}(-3) \\ H_{31}(-2) \\ H_{41}(-5) \\ H_{51}(-1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} H_{12}(-2) \\ H_{32}(5) \\ H_{42}(4) \\ H_{52}(-1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -4 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3\left(\frac{-1}{10}\right)} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 7/10 & -1/2 & 2/5 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} H_{13}(-5) \\ H_{23}(2) \\ H_{43}(10) \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 0 & -1/5 & 0 & 0 \\ 7/10 & -1/2 & 2/5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para la matriz Q , que es la matriz de paso por columnas, realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columnas que hemos hecho antes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \nu_{41}(-1) \\ \nu_{42}(1) \\ \nu_{43}(-1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos:

$$P = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 0 & -1/5 & 0 & 0 \\ 7/10 & -1/2 & 2/5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.— Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Hallar (si existe) una matriz inversible X tal que $XA = B$.

La existencia de X en las condiciones indicadas corresponde al hecho de que A y B sean equivalentes por filas, siendo X la matriz de paso.

Para analizar si son equivalente por filas hallamos y comparamos las formas canónicas reducidas por filas de cada una de ellas:

$$A \xrightarrow{H_{21}(-1)H_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$B \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que las formas canónicas reducidas por filas NO coinciden, por tanto NO son equivalentes por filas y no existe la matriz X pedida.

(ii) Hallar (si existe) una matriz inversible Y tal que $AY = B$.

Ahora la matriz Y multiplica por la derecha. El problema es análogo al del apartado anterior pero ahora con equivalencia por columnas.

Analizamos las formas canónicas reducidas por columnas de ambas.

$$A \xrightarrow{\mu_{21}(-1)\mu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}(-1)\mu_{32}(-1)\mu_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$B \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos la misma forma reducida; por tanto si son equivalentes por columnas y existe la matriz Y pedida. Para calcularla hacemos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hicimos sobre

A y después la inversa y en orden inverso de las que hicimos sobre B:

$$Id \xrightarrow{\mu_{21}(-1)\mu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}(-1)\mu_{32}(-1)\mu_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{13}(-1)}$$

$$\xrightarrow{\mu_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}^{-1}=\mu_{12}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) ¿Son A y B matrices equivalentes?

Si; acabamos de ver que son equivalentes por columna y por tanto son equivalentes.

(iv) Estudiar si AA^t y BB^t son congruentes.

Tenemos:

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad BB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Id$$

Son dos matrices simétricas. Son congruentes si al diagonalizarlas por congruencia (mismas operaciones fila y columna) se obtienen matrices con los mismos signos en la diagonal. La matriz BB^t ya está diagonalizada: es la identidad con tres signos positivos en la diagonal.

Veamos que ocurre con AA^t :

$$AA^t \xrightarrow{H_{21}(-5/3)H_{31}(-1)\mu_{21}(-5/3)\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23} \mu_{23}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1)\mu_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Vemos que en la forma diagonalizada también aparecen tres signos positivos. Por tanto AA^t y BB^t SI son congruentes.

5.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$.

(i) Estudiar para que valores de a, b, c las matrices A y B son congruentes.

En primer lugar recordemos que la congruencia conserva la simetría. Dado que la matriz A es simétrica, para que B sea congruente con ella también ha de ser simétrica y así necesariamente $b = 2$.

Ahora dos matrices simétricas con coeficientes reales son congruentes si y sólo si al ser diagonalizadas por congruencia en la forma diagonal de ambas aparecen exactamente el mismo número de signos positivos y negativos.

Comenzamos diagonalizando por congruencia la matriz A, es decir mediante operaciones elementales fila y exactamente las mismas en columna:

$$A \xrightarrow{H_{21}(-1)H_{31}(-1)\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32} \mu_{32}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)\mu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

Por tanto los signos de la forma diagonal de A son $\begin{cases} (+, +, +) & \text{si } a > 2 \\ (+, +, 0) & \text{si } a = 2 \\ (+, +, -) & \text{si } a < 2 \end{cases}$

Ahora diagonalizamos la matriz B :

$$B \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-2)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & c-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)} \xrightarrow{\mu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c-2 \end{pmatrix}$$

Los signos de la forma diagonal de C son $\begin{cases} (+, +, +) & \text{si } c > 2 \\ (+, +, 0) & \text{si } c = 2. \\ (+, +, -) & \text{si } c < 2 \end{cases}$.

Concluimos que son congruentes si y sólo si $b = 2$ y, $a, c > 2$ ó $a, c = 2$ ó $a, c < 2$. Dicho de otra manera son congruentes si y sólo si $b = 2$ y $\text{signo}(a - 2) = \text{signo}(c - 2)$.

(ii) Estudiar para que valores de a existe una matriz inversible P tal que $PAP^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. En tales

casos calcular P .

La transformación PAP^t corresponde a la relación de congruencia.

La matriz indicada ya es diagonal y salvo orden los signos que aparecen en la misma son $(+, +, 0)$. Vimos en el apartado anterior que en la forma diagonal de A esos signos aparecen si y sólo si $a - 2 = 0$, es decir, si $a = 2$.

Para hallar la matriz P primero seguimos modificando por congruencia la forma diagonal de A hasta llegar exactamente a la diagonal indicada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{13}} \xrightarrow{\mu_{13}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{3(2)}} \xrightarrow{\mu_{3(2)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz P es la que refleja las operaciones fila que hay que hacer para transformar A en la diagonal. Para hallarla realizamos sobre la identidad las operaciones fila hechas en el proceso de diagonalización:

$$\begin{aligned} Id &\xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{H_{13}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{3(2)}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P \end{aligned}$$

7.- Sean $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(i) Hallar los valores de a para que X e Y sean equivalentes por filas.

Para que sean equivalentes por filas tienen que tener la misma forma canónica reducida por filas.

Comenzamos con la matriz X :

$$X \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}(-1)} \xrightarrow{H_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz Y :

$$\begin{aligned} Y &\xrightarrow{H_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & a \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{H_3(-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}(-1)} \xrightarrow{H_{32}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vemos que para que las formas reducidas coincidan tiene que cumplirse que $a + 2 = 0$, es decir $a = -2$.

(ii) *Hallar los valores de a para que X e Y sean equivalentes por columnas.*

Ahora comparamos las formas reducidas por columnas. Para la matriz X :

$$X \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}(-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para la matriz Y :

$$Y \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & a \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}(1)} \xrightarrow{\mu_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & a+2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_1(1/2)} \xrightarrow{\mu_2(-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos (nos fijamos en la primera columna) que la forma reducida de Y por columnas no coincide con la de X para ningún valor de a .

8.— Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) *Estudiar en función de a y b cuando las matrices A y B son congruentes.*

Son ambas matrices simétricas. Son congruentes si y sólo si al ser diagonalizadas por congruencia aparecen los mismos signos positivos y negativos en la diagonal.

Comenzamos diagonalizando la matriz B :

$$B \xrightarrow{H_{12}(1)} \xrightarrow{\mu_{12}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1/2)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1/2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz A :

$$A \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

Vemos que en la diagonal aparecen $1, b-1, a-1$. Para que sea congruente con B , en el par $b-1, a-1$ tiene que haber un elemento nulo y otro negativo. Por tanto:

A y B son congruentes si y sólo si $b = 1$ y $a < 1$ ó $a = 1$ y $b < 1$.

(ii) *Para $b = 1$ y $a = 0$ hallar una matriz P inversible tal que $P^t A P = B$.*

La matriz de paso P representa las operaciones columna que hay que hacer en el proceso de congruencia para pasar de A a B .

Para $b = 1$ y $a = 0$ la forma diagonal de A que hemos obtenido es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Transformamos la forma diagonal de B para llegar exactamente a la misma que alcanzamos para A :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \xrightarrow{\mu_{23}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(1/\sqrt{2})} \xrightarrow{\mu_1(1/\sqrt{2})} \xrightarrow{H_3(\sqrt{2})} \xrightarrow{\mu_3(\sqrt{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces para hallar P hacemos sobre la identidad las operaciones columna que hicimos sobre A para llegar a la forma diagonal y la inversa y en orden inverso de las operaciones columna que hicimos sobre B para obtener esa misma forma diagonal:

$$\begin{aligned} Id &\xrightarrow{\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_1(\sqrt{2})\mu_3(1/\sqrt{2})} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{23}} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(1/2)} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}(-1)} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9.— Obtener mediante transformaciones elementales las inversas de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la inversa hacemos la reducción por filas hasta llegar a la identidad; la matriz inversa se obtiene realizando las mismas operaciones sobre la matriz identidad. Podemos hacer ambos procesos al mismo tiempo:

(a)

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} H_{21}(-1) \\ H_{31}(-1) \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} H_2(-1/2) \\ H_3(1/3) \end{matrix}} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array} \right) \xrightarrow{H_{12}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\begin{matrix} H_{13}(-3/2) \\ H_{23}(1/2) \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/6 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

10.— Discutir y, en su caso, resolver, en función del parámetro o parámetros correspondientes, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + ay = b \\ bx + ay = a \\ abx + aby = 1 \end{cases}$$

(a) Escribimos la matriz asociada al sistema y la ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

Entonces $|A| = a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2(a + 2)$. Por tanto:

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ el rango de A es 3 y coincide con el rango de \overline{A} y con el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x = \frac{-a - 1}{a + 2}; \quad y = \frac{1}{a + 2}; \quad z = \frac{(a + 1)^2}{a + 2}.$$

Si $a = -2$ ó $a = 1$ estudiamos el rango de la matriz ampliada. En particular:

- Si $a = 1$ vemos que las tres ecuaciones son en realidad la misma. Es decir el rango de A y de \overline{A} es 1. El sistema es compatible indeterminado. La solución depende de dos parámetros:

$$x = 1 - \lambda - \mu; \quad y = \lambda; \quad z = \mu$$

- Si $a = -2$, vemos que el rango de \overline{A} es 3, ya que el menor formado por las columnas 2, 3, 4 tiene determinante no nulo. Por tanto, como A es en este caso tiene rango 2, el sistema es incompatible.

(b) Escribimos la matriz asociada al sistema y la ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ b & a \\ ab & ab \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ ab & ab & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A , a lo sumo es 2. El de \overline{A} puede ser 3 si su determinante no se anula. Veamos cuando ocurre esto. Tenemos que $|\overline{A}| = a(b - a)(b - 1)(b + 1)$. Por tanto:

- Si $a \neq 0$, $a \neq b$, $b \neq 1$ y $b \neq -1$ entonces el determinante de \overline{A} es 3 y el sistema es incompatible.

- Si $a = 0$, en la última ecuación queda $0 = 1$ y por tanto el sistema es incompatible.

- Si $a = b$, $a \neq 0$, la primera y segunda ecuación coinciden. Tenemos ahora el sistema:

$$\begin{cases} ax + ay = a \\ a^2x + a^2y = 1 \end{cases}$$

Ahora la matriz asociada al nuevo sistema tiene rango 1. Será compatible cuando coincida con el de la ampliada; en este caso cuando $a^2 = 1$. Así si $a = 1$ o $a = -1$ el sistema tiene solución dependiente de un parámetro $x = 1 - \lambda; y = \lambda$. Mientras que en otro caso el sistema no es compatible.

- Si $b = 1$, $a \neq 0$, $a \neq 1$ la primera y tercera ecuación coinciden. Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} ax + ay = 1 \\ x + ay = a \end{cases}$$

Ahora el sistema es compatible determinado. La solución es $x = -1; y = \frac{1 + a}{a}$.

- Si $b = -1$, $a \neq 0$, $a \neq -1$, de nuevo la primera y tercera ecuación coinciden. Queda:

$$\begin{cases} ax + ay = -1 \\ -x + ay = a \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado. La solución es $x = \frac{-a - 1}{a + 1}; y = \frac{a^2 - 1}{a^2 + a}$

11.— Encontrar un sistema de ecuaciones cuya solución sea la siguiente:

$$\begin{cases} x^1 &= 2\lambda - \nu \\ x^2 &= \lambda - 2\nu + \delta \\ x^3 &= -\lambda + \nu - 2\delta \\ x^4 &= \lambda + 2\delta \end{cases} \quad (\lambda, \nu, \delta \in \mathbb{R})$$

Se trata de eliminar los parámetros. Una forma de hacerlo es resolver el sistema formado por las tres primeras ecuaciones, considerando como incógnitas λ, μ, δ y sustituir en la cuarta las soluciones. De esta forma obtenemos:

$$\lambda = \frac{3x^1 - 2x^2 - x^3}{5}; \quad \mu = \frac{x^1 - 4x^2 - 2x^3}{5}; \quad \delta = \frac{-x^1 - x^2 - 3x^3}{5}$$

y la ecuación:

$$x^1 - 4x^2 - 7x^3 - 5x^4 = 0$$

12.— Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar en cada caso y cuando sea posible, una matriz inversible X verificando:

Tenemos en cuenta que la existencia de una matriz inversible X tal que $XA = B$ es lo mismo que el hecho de que A y B sean equivalentes por filas, donde X es la matriz de paso de una a otra. También puede ser útil recordar que dos matrices equivalentes tienen el mismo rango.

Comenzamos calculando la forma reducida de A por equivalencia por filas:

$$A \xrightarrow{H_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{31}(-1/2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(1/2)H_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) $XA = \begin{pmatrix} 81 & 0 & 17 \\ 31 & 32 & 33 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Es fácil ver que el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 81 & 0 & 17 \\ 31 & 32 & 33 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es no nulo. Por tanto tiene rango 3 y nunca puede ser equivalente por filas a la matriz A , cuyo rango es 2.

(b) $XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Tampoco en este caso hay solución ya que la forma reducida por filas de A es distinta de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculemos la forma reducida por equivalencia por filas de la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)H_{31}(-7)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que se obtiene la misma forma reducida que para la matriz A . Por tanto ambas son equivalentes por filas y en este caso el problema tiene solución. Para hallar la matriz X hacemos sobre la identidad

las operaciones que nos llevaron de A a su forma reducida y la inversa de las que llevaron de B a la forma reducida:

$$\begin{aligned}
 Id \xrightarrow{H_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{H_{31}(-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
 H_{1(1/2)} H_{23} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \xrightarrow{H_2(-1)} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -3/2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -3/2 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
 H_{21} H_{31}(7) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3/2 & 1 & 5/2 \end{pmatrix} & = X
 \end{aligned}$$

13.— Dado $a \in \mathbb{R}$ se definen las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5-a \end{pmatrix}$$

Determinar los valores de a para los cuáles las matrices A y B son congruentes. Para $a = 4$ hallar una matriz P inversible tal que $PAP^t = B$.

Para analizar si son congruentes estudiamos los signos de las formas diagonales que se obtienen al diagonalizar por congruencia, es decir, aplicando las mismas operaciones elementales fila y columna. Para la matriz A :

$$A \xrightarrow{H_{12} \mu_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2) \mu_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-4 \end{pmatrix}$$

y por tanto:

- Si $a > 4$ aparecen dos signos positivos.
- Si $a = 4$ aparecen un signo positivo.
- Si $a < 4$ aparece un signo positivo y otro negativo.

Sobre la matriz B :

$$B \xrightarrow{H_{21}(-1) \mu_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4-a \end{pmatrix}$$

y por tanto:

- Si $a < 4$ aparecen dos signos positivos.
- Si $a = 4$ aparecen un signo positivo.
- Si $a > 4$ aparece un signo positivo y otro negativo.

Deducimos que son congruentes si y sólo si $a = 4$.

La matriz P que cumple $PAP^t = B$, es la que representa las operaciones filas hechas para pasar de A a B . Equivalentemente las de A a la forma diagonal, y luego las de esa misma forma diagonal hasta B :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(H_{21}(-1))^{-1} = H_{21}(1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

14.— Dar un ejemplo de tres matrices $A, B, C \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ simétricas, inversibles y no diagonales, de manera que A y B sean congruentes, pero C no sea congruente con A . Justificar la respuesta.

Dos matrices simétricas reales son congruentes si y sólo si una se obtiene de la otra multiplicando a un lado por una matriz inversible y al otro por su traspuesta; equivalentemente si se pasa de una a la otra haciendo operaciones elementales fila y exactamente las mismas en columna; equivalentemente si al ser diagonalizadas por congruencia se obtienen el mismo número de signos positivos y negativos en la diagonal. Además la congruencia conserva el rango.

Entonces para construir A y B congruentes partimos de la identidad (que es inversible y por tanto también lo será cualquier matriz congruente con ella) y realizamos operaciones elementales fila y las mismas en columna de dos maneras diferentes:

$$Id \xrightarrow{H_{21}(1)} \xrightarrow{\mu_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

$$Id \xrightarrow{H_{31}(1)} \xrightarrow{\mu_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

Para construir una matriz C no congruente con las anteriores e inversibles partimos de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y realizamos una operación fila y la misma en columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(1)} \xrightarrow{\mu_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = C.$$

15.— Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ dos matrices. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(ii) Si A y B son equivalentes por filas y tienen rango m entonces son equivalentes por columnas.

FALSO. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son matrices 2×1 de rango 1 equivalentes por filas, pero no equivalentes por columnas.

(iii) Si A y B son equivalentes por filas entonces $A + B$ y $A - B$ son equivalentes por filas.

FALSO. Por ejemplo si $n = m = 2$ y $A = B = Id$ entonces obviamente A y B son equivalentes por filas por ser la misma matriz, pero $A + B = 2Id$ tiene rango 2 y no puede ser por tanto equivalente por filas a $A - B = 0$ que tiene rango 0, ya que la equivalencia por filas conserva el rango.

(iv) $\text{rango}(AB) = \text{rango}(BA)$.

FALSO. Por ejemplo si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y así $\text{rango}(AB) = 1 \neq 0 = \text{rango}(BA)$.

16.— Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ matrices simétricas. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) Si A y B son congruentes entonces tienen el mismo número de términos positivos y negativos en la diagonal.

FALSO. Por ejemplo si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = -Id$, ambas tienen dos signos negativos en la diagonal. Sin embargo $\det(A) = -3$ y $\det(B) = 1$, luego no pueden ser congruentes porque la congruencia conserva el signo del determinante.

(ii) Si $\text{signo}(\det(A)) = \text{signo}(\det(B))$ entonces A y B son congruentes.

FALSO. Por ejemplo si $A = Id$ y $B = -Id$ ambas tienen determinante positivo. Sin embargo NO son congruentes porque sus **formas diagonales por congruencia** (ya están diagonalizadas) no presentan el mismo número de signos positivos y negativos en la diagonal.

(iii) $AB - BA$ es una matriz hemisimétrica.

VERDADERO. Recordemos que una matriz es hemisimétrica si al transponerla cambia de signo. Pero:

$$(AB - BA)^t = (AB)^t - (BA)^t = B^t A^t - B^t A^t$$

Como A y B son simétricas coinciden con sus traspuestas y queda:

$$(AB - BA)^t = (AB)^t - (BA)^t = B^t A^t - B^t A^t = BA - AB = -(AB - BA).$$

(iv) AB es una matriz simétrica.

FALSO. Por ejemplo si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ambas son simétricas, pero:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

que NO es simétrica.

I.— *Demostrar que las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

son congruentes. Dar una matriz P inversible tal que $B = P^t A P$.

Dos matrices simétricas del mismo tamaño son congruentes si y sólo si al ser diagonalizadas por congruencia (mismas operaciones elementales fila que columna) aparecen los mismos signos en la diagonal.

Diagonalizamos ambas matrices para verificarlo:

$$A \xrightarrow{H_{21}(-1)H_{31}(-1)\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-2)\mu_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B \xrightarrow{H_{12} \mu_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)H_{31}(-1)\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1)\mu_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

En ambos casos hemos obtenido dos signos positivos y uno negativo en la diagonal, luego si son congruentes.

Para hallar la matriz de paso P completamos la diagonalización de B para llegar exactamente a la misma forma diagonal que en A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3(1/2)\mu_3(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23} \mu_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hemos hecho para pasar de A a su forma diagonal y la inversa (y en orden inverso) de las operaciones columna que hemos hecho para pasar de B a su forma diagonal:

$$\begin{aligned} Id \xrightarrow{\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{23}^{-1}=\mu_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \mu_3(1/2)^{-1}=\mu_3(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{32}(-1)^{-1}=\mu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)^{-1}=\mu_{21}(1) \quad \mu_{31}(-1)^{-1}=\mu_{31}(1)} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}^{-1}=\mu_{12}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \end{aligned}$$

III.— Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se definen las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar los valores de a y b para los cuales la matriz A es equivalente por filas a B y equivalente por columnas a C .

Observamos que el rango de C es dos, luego una condición necesaria para que A sea equivalente por columna con C es que tenga rango 2 y por tanto su determinante ha de ser nulo.

$$\det(A) = a - b$$

Por tanto ha de cumplirse que $a = b$.

Observamos que la matriz B ya está reducida por filas. Ahora reducimos por filas la matriz A :

$$A \xrightarrow{H_{21}(-1)H_{31}(-1)} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a = 0$ queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq B$$

y vemos que A y B no son equivalentes por filas.

Si $a \neq 0$ queda:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(1/a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Coincide con B cuando $1/a = a$, es decir, cuando $a = \pm 1$.

Finalmente reducimos por columnas la matriz A para ver cuando coincide con C :

$$A \xrightarrow{\mu_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{31}(-a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Por tanto A siempre es equivalente por columnas a C .

La conclusión es que A es equivalente por filas a B y por columnas a C si y sólo si $a = b = \pm 1$.

IV.— Dada la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$$

(a) Hallar todos los valores de a, b para los cuáles B diagonaliza por congruencia.

Para que una matriz cuadrada diagonalice por congruencia la condición necesaria y suficiente es que sea simétrica. Por tanto basta exigir $a = -1$.

(b) Hallar todos los valores de a, b para los cuáles B es congruente en \mathbb{R} con:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Por lo dicho en (a), sabemos que $a = -1$. Además dos matrices diagonales de la misma dimensión son congruentes en \mathbb{R} si y sólo si tienen el mismo número de términos positivos y negativos en la diagonal. Ahora diagonalizamos la matriz B dada, para ver los signos de los términos que aparecen en la diagonal:

$$B \xrightarrow{H_{21}(-2)\nu_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1/3)\nu_{32}(-1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & b + 1/3 \end{pmatrix}$$

Como la segunda matriz indicada tiene dos números positivos en la diagonal y uno negativo, para que sea congruente a la dada tiene que cumplirse que $b + 1/3 < 0$, es decir, $b < -1/3$.

(c) *Hallar todos los valores de a, b para los cuáles B es congruente en \mathbb{R} con la identidad.*

Por lo visto en el apartado anterior es imposible que B sea congruente en la identidad, porque en su forma diagonal siempre aparece al menos un elemento con signo negativo.

V.— Dado $k \in \mathbb{R}$, se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}.$$

Explicar de manera razonada si cada una de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.

i) *Si $k = 1$ son congruentes.*

FALSO. Si $k = 1$ se tiene $\text{rango}(A) = 1$, pero $\text{rango}(B) = 2$. Dos matrices congruentes debieran de tener el mismo rango.

ii) *Para $k = 2$ son equivalentes por filas.*

FALSO. Para cada una de ellas hallamos la forma reducida por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

No coinciden y por tanto no son equivalentes por filas.

ii) *Para $k = 2$ son equivalentes por columnas.*

FALSO. Para cada una de ellas hallamos la forma reducida por columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

No coinciden y por tanto no son equivalentes por columnas.

VI.— Sean las matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

¿Es posible encontrar una matriz inversible $X \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $AX = B$?

Multiplicar la matriz A por la derecha por una matriz inversible X consiste en hacer operaciones elementales columna. Por tanto la cuestión es si A y B son equivalentes por columnas. Tenemos:

$$A \xrightarrow{\nu_{21}(2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\nu_1(-1)\nu_2(1/5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\nu_{12}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y por otra parte:

$$B \xrightarrow{\nu_1(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\nu_{21}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\nu_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\nu_1(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego A y B no son equivalentes por columnas.

¿ Y una matriz inversible $Y \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que $YA = B$? Razonar las respuestas.

Ahora hay que ver si son equivalentes por filas:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{31}(3)} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1)} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}(-2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y para la otra matriz:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(1)} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{31}(1)} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-2)} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego vemos que son equivalentes filas.

VII.— Obtener mediante transformaciones elementales y cuando sea posible, la inversa de las matriz:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & a \end{pmatrix}$$

En primer lugar observamos que el determinante de la matriz es a^n . Por tanto la matriz es inversible si y sólo si $a \neq 0$.

Trabajamos bajo el supuesto de que $a \neq 0$. Para hallar la inversa hacemos la reducción por filas hasta llegar a la identidad; la matriz inversa se obtiene realizando las mismas operaciones sobre la matriz identidad. Podemos hacer ambos procesos al mismo tiempo:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Sumamos ahora la primera fila multiplicada por b/a a la segunda ; luego la segunda multiplicada por b/a a la tercera y así sucesivamente. Suponiendo que es una matriz $n \times n$, queda:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & b/a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & b^2/a^2 & b/a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & b^{n-2}/a^{n-2} & b^{n-3}/a^{n-3} & b^{n-4}/a^{n-4} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b^{n-1}/a^{n-1} & b^{n-2}/a^{n-2} & b^{n-3}/a^{n-3} & \cdots & b/a & 1 \end{array} \right)$$

y ahora dividiendo cada fila por a :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b/a^2 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & b^2/a^3 & b/a^2 & 1/a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & b^{n-2}/a^{n-1} & b^{n-3}/a^{n-2} & b^{n-4}/a^{n-3} & \dots & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b^{n-1}/a^n & b^{n-2}/a^{n-1} & b^{n-3}/a^{n-2} & \dots & b/a^2 & 1/a \end{array} \right)$$

VIII.— Obtener la forma canónica de la siguiente matriz respecto de la congruencia sobre el cuerpo \mathbb{R} y sobre el cuerpo \mathbb{C} , así como las matrices de paso:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Es una matriz simétrica. Para reducir por congruencia, las operaciones que hagamos por filas las hacemos también a las columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1/3)\nu_{21}(-1/3)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{31}(3/2)\nu_{31}(3/2)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{H_1(1/\sqrt{6})\nu_1(1/\sqrt{6})H_2(\sqrt{3}/2)\nu_2(\sqrt{3}/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta es la forma canónica por congruencia sobre \mathbb{R} . En este caso coincide con la forma canónica compleja, porque todos los términos de la diagonal son no negativos. Serían diferente si apareciera algún -1 en la forma canónica en \mathbb{R} .

Para calcular la matriz P de paso de manera que $A = PCP^t$, basta hacer las operaciones *por fila* que le hemos hecho a A sobre la identidad. De esta forma obtenemos:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/6 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

IX.— Sean $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dos matrices con el mismo determinante y la misma traza. ¿Es posible que A y B no sean equivalentes? ¿Y si además son simétricas? Razona las respuestas.

Dos matrices $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango.

Para que NO sean equivalentes puede ocurrir:

i) Que una tenga rango dos y otra no.

Pero entonces no se cumpliría que tienen el mismo determinante (uno sería nulo y el otro no).

ii) Que una tenga rango uno y otra rango cero. Pero entonces la de rango uno tiene que tener traza cero. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \Omega.$$

Luego si puede ocurrir que tengan el mismo determinante y la misma traza, pero no sean equivalentes.

Sin embargo si son simétricas, se tiene que toda matriz simétrica de traza nula es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Si exigimos que su determinante sea además nulo:

$$0 = \det(A) = -a^2 - b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b = 0.$$

Llegamos a que $A = \Omega$, luego ambas tendrían rango 0.

Por tanto deducimos que dos matrices $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ simétricas y con el mismo determinante y traza siempre son equivalentes.

X.— Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) *Estudiar que parejas de matrices son equivalentes.*

Dos matrices de igual dimensión son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango. Estudiamos el rango de cada una de ellas:

* $\det(A) = -1 \neq 0$ por tanto $\text{rango}(A) = 2$.

* $\det(B) = \det(C) = \det(D) = 0$ y como ninguna de ellas es la matriz nula, $\text{rango}(B) = \text{rango}(C) = \text{rango}(D) = 1$.

Por tanto B, C, D son equivalentes entre si; pero A no es equivalente ni con B , ni con C , ni con D .

(ii) *Estudiar que parejas de matrices son semejantes.*

Una condición necesaria para que sean semejantes es que tengan el mismo rango. Luego ya sabemos que A no es semejante a ninguna de las otras tres.

Veamos que ocurre con B, C y D . Otra condición necesaria para la semejanza es que las matrices tengan la misma traza. Se tiene que:

$$\text{traza}(B) = 8, \quad \text{traza}(C) = 8, \quad \text{traza}(D) = 2$$

Por tanto D no es semejante ni a B ni a C .

Resta ver que ocurre con las parejas (B, C) . Para que sean semejantes deberían de tener los mismos autovalores (es una condición necesaria, aunque no suficiente).

Calculamos los autovalores de B :

$$\det(B - \lambda Id) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda - 8) = 0.$$

Por tanto sus autovalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 8$ con multiplicidad algebraica 1 (y también geométrica). Deducimos que B diagonaliza por semejanza a una matriz diagonal con autovalores 0 y 8; pero tal matriz es precisamente la matriz C luego son semejantes.

(iii) *Estudiar que parejas de matrices son congruentes, dando para cada una de ellas la correspondiente matriz de paso por congruencia.*

Una condición necesaria para la congruencia es que tengan el mismo rango. Por tanto de nuevo A no es congruente con B, C ó D . Además la congruencia conserva la simetría. Como B no es simétrica y C y D si lo son, la primera tampoco puede ser congruente con las dos últimas. Resta ver que ocurre con C y D : serán congruentes si al diagonalizarlas por congruencia llegamos a la misma signatura:

C ya es diagonal.

La matriz D la diagonalizamos realizando las mismas operaciones por fila que por columna:

$$D \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(\sqrt{8})} \xrightarrow{\mu 1(\sqrt{8})} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Vemos que las dos tienen signatura $(1, 0)$ y por tanto son congruentes. La matriz de paso P tal que $PDP^t = C$ se obtiene haciendo sobre la identidad las mismas operaciones fila que hicimos para llegar de D a C :

$$Id \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(\sqrt{8})} \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P$$

XI.— *Discutir y, en su caso, resolver, en función de los parámetros correspondientes, el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} ax + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases}$$

Escribimos la matriz asociada al sistema y la ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ x & -2 & b \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ x & -2 & b & 3 \end{pmatrix}$$

Estudiamos los rangos en función de a y b . Tenemos $|A| = 2(12 - ab)$. Luego:

- Si $ab \neq 12$, entonces $\text{rango}(A) = \text{rango}(\bar{A}) = 3$. Coincide con el número de incógnitas por lo que el sistema es compatible determinado.

Resolviéndolo por Kramer se obtiene:

$$x = \frac{2(b-4)}{12-ab}; \quad y = \frac{ab-10b+28}{24-2ab}; \quad z = \frac{4(a-3)}{12-ab}.$$

Si $ab = 12$, el rango de A es 2, porque el menor formado por las dos primeras filas y columnas siempre tiene determinante no nulo. El rango de \bar{A} , sin embargo, puede ser 3, si hay algún menor de orden 3 que tenga determinante nulo. Vemos que esto ocurre exactamente si $a \neq 3$. Es decir:

- Si $ab = 12$ pero $a \neq 3$, entonces el sistema es incompatible.

- Si $a = 3$ y $b = 4$, el sistema es compatible indeterminado. De las dos primeras ecuaciones se obtiene:

$$x = \frac{2(1-\lambda)}{3}; \quad y = \frac{-7+10\lambda}{6}; \quad z = \lambda.$$

XII.— *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) *Si $\det(A) \neq 0$ y además A y B son equivalentes por filas entonces también son equivalentes por columnas.*

VERDADERO. Si $\det(A) \neq 0$ entonces $\text{rango}(A) = 2$. Si A y B son equivalentes por filas entonces $\text{rango}(B) = \text{rango}(A) = 2$ y así B también es inversible. Pero toda matriz inversible es equivalente tanto por filas como por columnas a la identidad. Por tanto A y B son equivalentes por columnas con la identidad y por tanto equivalentes por columnas entre si.

(ii) *Si $\det(A) = \det(B) = 0$ entonces A y B son equivalentes.*

FALSO. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ambas son de determinante nulo, pero $\text{rango}(A) = 0$ y $\text{rango}(B) = 1$. Por tanto NO son equivalentes por tener distinto rango.

(iii) *$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.*

FALSO. Notamos que:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Para que se diese la igualdad propuesta tendría que cumplirse que $AB = BA$, es decir, que las matrices conmutasen. Pero esto no siempre ocurre. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pero:

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) Si A y B son congruentes entonces $\text{signo}(\text{traza}(A)) = \text{signo}(\text{traza}(B))$.

FALSO. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

son congruentes porque son diagonales con los mismos signos en la diagonal, pero:

$$\text{signo}(\text{traza}(A)) = \text{signo}(2 - 1) = \text{signo}(1) = +1$$

$$\text{signo}(\text{traza}(B)) = \text{signo}(1 - 2) = \text{signo}(-1) = -1$$

XIII.— Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, con $\det(A) = 1$ y $\det(B) = 2$. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) A y B son congruentes.

FALSO. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ cumplen que $\det(A) = 1$, $\det(B) = 2$ pero no son congruentes porque son diagonales con distinta signatura.

(ii) A y B pueden ser congruentes.

VERDADERO. Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ cumplen que $\det(A) = 1$, $\det(B) = 2$ y son congruentes porque son diagonales con la misma signatura.

(iii) A y B pueden ser semejantes.

FALSO. Si fuesen semejantes entonces existiría P inversible tal que $A = P^{-1}BP$; pero entonces tendrían el mismo determinante ya que:

$$|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}||B||P| = |P|^{-1}|B||P| = |B|$$

Pero $\det(A) = 1 \neq 2 = \det(B)$.

(iv) Si $A = Id$ y $\text{traza}(B) = 0$ entonces A y B no son congruentes.

VERDADERO. Si fuesen congruentes por ser A simétrica entonces también B tendría que ser simétrica. Como además $\text{traza}(B) = 0$, B sería de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Pero entonces:

$$\det(B) = -a^2 - b^2 \leq 0$$

y no puede ocurrir que $\det(B) = 2$.
