ÁLGEBRA LINEAL I

Algunas soluciones a la Práctica 4

Equivalencia de matrices. Sistemas de ecuaciones (Curso 2019–2020)

1.– *Hallar la forma reducida equivalente por filas de la matriz:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{H_{21}(-3) \\ H_{31}(-2) \\ H_{41}(-5) \\ H_{51}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{H_{12}(-2) \\ H_{32}(5) \\ H_{42}(4) \\ H_{52}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3(\frac{-1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{H_{13}(-5) \\ H_{23}(2) \\ H_{43}(10)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.– *Obtener mediante transformaciones elementales el rango, la forma canónica B respecto de la equivalencia y matrices no singulares P y Q que cumplan $B = PAQ$, siendo A cada una de las matrices del problema anterior.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\nu_{41}(-1) \\ \nu_{42}(1) \\ \nu_{43}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que tiene rango 3. Como en el apartado anterior, calculamos las matrices P y Q de paso realizando las operaciones elementales sobre la matriz identidad (¡OJO!, la identidad de orden igual al número de filas para la matriz P y de orden igual al número de columnas para la matriz Q).

Para la matriz P, que es la matriz de paso por filas, realizamos sobre la identidad las mismas operaciones files que hemos hecho en el ejercicio 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{H_{21}(-3) \\ H_{31}(-2) \\ H_{41}(-5) \\ H_{51}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{H_{12}(-2) \\ H_{32}(5) \\ H_{42}(4) \\ H_{52}(-1)}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -4 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3(\frac{-1}{10})}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 7/10 & -1/2 & 2/5 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{H_{13}(-5) \\ H_{23}(2) \\ H_{43}(10)}} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 0 & -1/5 & 0 & 0 \\ 7/10 & -1/2 & 2/5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para la matriz Q, que es la matriz de paso por columnas, realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columnas que hemos hecho antes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\nu_{41}(-1)\\ \nu_{42}(1)\\ \nu_{43}(-1)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos:

$$P = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 0 & -1/5 & 0 & 0 \\ 7/10 & -1/2 & 2/5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.– *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix},$$

hallar los valores de a para que sean:

En primer lugar tenemos en cuenta que una condición necesaria para que se cumpla cualquiera de las cinco condiciones es que las matrices tengan el mismo rango.

Tenemos $rango(A) = 2$, ya que la primera fila es nula y el determinantes formado por las dos últimas filas y columnas es no nulo.

Calculamos el rango de B en función de a. Para ello la reducimos por filas (aprovecharemos las cuentas en el apartado (i)).

$$B \overset{H_{21}(1)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2+a \\ 0 & a+2 & 8 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-(a+2)/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2+a \\ 0 & 0 & 8-\dfrac{(a+2)^2}{2} \end{pmatrix}$$

Para que le rango de B sea 2 tiene que cumplirse que $8 - \dfrac{(a+2)^2}{2} = 0$. Equivalentemente $(a+2)^2 = 16$ y resolviendo $a = -6$ ó $a = 2$.

Por tanto cualquiera de las cinco condiciones que hemos de estudiar sólo pueden cumplirse si $a = -6$ o $a = 2$.

(i) *Equivalentes por filas.*

Comparamos la forma reducida por filas de ambas matrices. Para la matriz A:

$$A \overset{H_{13}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz B ya la habíamos reducido por filas anteriormente llegando a:

$$B \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2+a \\ 0 & 0 & 8-\dfrac{(a+2)^2}{2} \end{pmatrix}$$

Si $a = 2$ queda:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_2(1/2)}{\longrightarrow}\overset{H_1(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No coincide con la forma reducida por filas de A y por tanto no son equivalentes por filas para $a = 2$.

Si $a = -6$ queda:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_2(1/2)H_1(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No coincide con la forma reducida por filas de A y por tanto no son equivalentes por filas para $a = -6$.

Es decir en ningún caso son equivalentes por filas.

(ii) *Equivalentes por columnas.*

Dado que las matrices son simétricas, las formas reducidas equivalentes por columnas son las traspuestas de las reducidas por filas. Dado que éstas no coincidían para ningún valor de a concluimos que nunca se da la equivalencia por columnas.

(iii) *Equivalentes.*

Son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango. Ya hemos visto que eso ocurre si y sólo si $a = 2$ ó $a = -6$.

(iv) *Congruentes (para algún valor de a para el cuál sean congruentes, hallar además la matriz de paso).*

Por ser simétricas sabemos que ambas diagonalizan por congruencia. Serán congruentes si en las formas diagonalizadas aparacen términos con los mismos signos en ambas matrices.

Comenzamos por diagonalizar por congruencia A (haciendo las mismas operaciones filas que columna):

$$A \overset{H_{23}(1)\mu_{23}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1/2)\mu_{32}(-1/2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ahora diagonalizamos la matriz B:

$$B \overset{H_{21}(1)H_{31}(2)\mu_{21}(1)\mu_{31}(2)}{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2+a \\ 0 & a+2 & 8 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-(a+2)/2)\mu_{32}(-(a+2)/2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 - \dfrac{(a+2)^2}{2} \end{pmatrix}$$

Para que aparezcan los mismos signos en la diagonal que en la forma reducida de A tiene que cumplirse que $8 - \dfrac{(a+2)^2}{2} = 0$. Ya hemos visto que esto ocurre cuando $a = 2$ ó $a = -6$.

Por tanto A y B son congruentes si y sólo si $a = 2$ ó $a = -6$.

Para $a = 2$ hallemos la matriz de paso. Para ello completamos la diagonalización de A llevándola exactamente a la misma forma diagonal que hemos obtenido para B:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \overset{H_{13}\ \mu_{13}}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_1(\sqrt{2})\mu_1(\sqrt{2})}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente hacemos sobre la identidad las operaciones fila que hemos hecho sobre A para llegar a la forma diagonal y la inversa de las hechas sobre B:

$$Id \overset{H_{23}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \overset{H_{13}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{H_1(\sqrt{2})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{H_{21}(-1)H_{31}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1+\sqrt{2}/2 & 1-\sqrt{2}/2 \\ 1 & 2+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Es decir la matriz P de paso que verifica $PAP^t = B$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1+\sqrt{2}/2 & 1-\sqrt{2}/2 \\ 1 & 2+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

7.– *Sean* $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(i) *Hallar los valores de a para que X e Y sean equivalentes por filas.*

Para que sean equivalentes por filas tienen que tener la misma forma canónica reducida por filas.

Comenzamos con la matriz X:

$$X \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(-1)}{\longrightarrow}\overset{H_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz Y:

$$Y \overset{H_1(1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & a \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{H_3(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & a \end{pmatrix} \overset{H_{12}(-1)}{\longrightarrow}\overset{H_{32}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

Vemos que para que las formas reducidas coincidan tiene que cumplirse que $a+2=0$, es decir $a=-2$.

(ii) *Hallar los valores de a para que X e Y sean equivalentes por columnas.*

Ahora comparamos las formas reducidas por columnas. Para la matriz X:

$$X \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{12}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para la matriz Y:

$$Y \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & a \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\mu_{12}(1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{42}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & a+2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mu_1(1/2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_2(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos (nos fijamos en la primera columna) que la forma reducida de Y por columnas no coincide con la de X para ningún valor de a.

9.– *Obtener mediante transformaciones elementales las inversas de las siguientes matrices:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la inversa hacemos la reducción por filas hasta llegar a la identidad; la matriz inversa se obtiene realizando las mismas operaciones sobre la matriz identidad. Podemos hacer ambos procesos al mismo tiempo:

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{H_{21}(-1)\\H_{31}(-1)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{H_{2}(-1/2)\\H_{3}(1/3)}}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \overset{H_{12}(-1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{H_{13}(-3/2)\\H_{23}(1/2)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/6 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

10.– *Discutir y, en su caso, resolver, en función del parámetro o parámetros correspondientes, los siguientes sistemas de ecuaciones:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ x+ay+z & = & a \\ x+y+az & = & a^2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} ax+ay & = & b \\ bx+ay & = & a \\ abx+aby & = & 1 \end{array}\right.$$

(a) Escribimos la matriz asociada al sistema y la ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

Entonces $|A| = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$. Por tanto:

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ el rango de A es 3 y coincide con el rango de $\overline{A}$ y con el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x = \frac{-a-1}{a+2}; \qquad y = \frac{1}{a+2}; \qquad z = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

Si $a = -2$ ó $a = 1$ estudiamos el rango de la matriz ampliada. En particular:

- Si $a = 1$ vemos que las tres ecuaciones son en realidad la misma. Es decir el rango de A y de $\overline{A}$ es 1. El sistema es compatible indeterminado. La solución depende de dos parámetros:

$$x = 1 - \lambda - \mu; \qquad y = \lambda; \qquad z = \mu$$

- Si $a = -2$, vemos que el rango de $\overline{A}$ es 3, ya que el menor formado por las columnas $2, 3, 4$ tiene determinante no nulo. Por tanto, como A es en este caso tiene rango 2, el sistema es incomptaible.

(b) Escribimos la matriz asociada al sistema y la ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ b & a \\ ab & ab \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ ab & ab & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A, a lo sumo es 2. El de $\overline{A}$ puede ser 3 si su determinate no se anula. Veamos cuando ocurre esto. Tenemos que $|\overline{A}| = a(b-a)(b-1)(b+1)$. Por tanto:

- Si $a \neq 0$, $a \neq b$, $b \neq 1$ y $b \neq -1$ entonces el determinate de $\overline{A}$ es 3 y el sistema es incompatible.

- Si $a = 0$, en la última ecuación queda $0 = 1$ y por tanto el sistema es incompatible.

- Si $a = b$, $a \neq 0$, la primera y segunda ecuación coinciden. Tenemos ahora el sistema:

$$\begin{cases} ax + ay &= a \\ a^2x + a^2y &= 1 \end{cases}$$

Ahora la matriz asociada al nuevo sistema tiene rango 1. Será compatible cuando coindida con el de la ampliada; en este caso cuando $a^2 = 1$. Así si $a = 1$ o $a = -1$ el sistema tiene solución dependiente de un parámetro $x = 1 - \lambda; y = \lambda$. Mientras que en otro caso el sistema no es compatible.

- Si $b = 1$, $a \neq 0$, $a \neq 1$ la primera y tercera ecuación coinciden. Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} ax + ay &= 1 \\ x + ay &= a \end{cases}$$

Ahora el sistema es compatible determinado. La solución es $x = -1; y = \dfrac{1+a}{a}$.

- Si $b = -1$, $a \neq 0$, $a \neq -1$, de nuevo la primera y tercera ecuación coinciden. Queda:

$$\begin{cases} ax + ay &= -1 \\ -x + ay &= a \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado. La solución es $x = \dfrac{-a-1}{a+1}; y = \dfrac{a^2-1}{a^2+a}$

11.– *Encontrar un sistema de ecuaciones cuya solución sea la siguiente:*

$$\begin{cases} x^1 &= 2\lambda - \nu \\ x^2 &= \lambda - 2\nu + \delta \\ x^3 &= -\lambda + \nu - 2\delta \\ x^4 &= \lambda + 2\delta \qquad\qquad (\lambda,\ \nu,\ \delta \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Se trata de eliminar los parámetros. Una forma de hacerlo es resolver el sistema formado por las tres primeras ecuaciones, considerando como incógnitas λ, μ, δ y sustituir en la cuarta las soluciones. De esta forma obtenemos:

$$\lambda = \frac{3x^1 - 2x^2 - x^3}{5}; \quad \mu = \frac{x^1 - 4x^2 - 2x^3}{5}; \quad \delta = \frac{-x^1 - x^2 - 3x^3}{5}$$

y la ecuación:

$$x^1 - 4x^2 - 7x^3 - 5x^4 = 0$$

12.– *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Hallar en cada caso y cuando sea posible, una matriz inversible X verificando:*

Tenemos en cuenta que la existencia de una matriz inversible X tal que $XA = B$ es lo mismo que el hecho de que A y B sean equivalentes por filas, donde X es la matriz de paso de una a otra. También puede ser útil recordar que dos matrices equivalentes tienen el mismo rango.

Comenzamos calculando la forma reducida de A por equivalencia por filas:

$$A \xrightarrow{H_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{31}(-1/2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(1/2)H_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) $XA = \begin{pmatrix} 81 & 0 & 17 \\ 31 & 32 & 33 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Es fácil ver que el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 81 & 0 & 17 \\ 31 & 32 & 33 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es no nulo. Por tanto tiene rango 3 y nunca puede ser equivalente por filas a la matriz A, cuyo rango es 2.

(b) $XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Tampoco en este caso hay solución ya que la forma reducida por filas de A es distinta de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculemos la forma reducida por equivalencia por filas de la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)H_{31}(-7)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_2(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que se obtiene la misma forma reducida que para la matriz A. Por tanto ambas son equivalentes por filas y en este caso el problema tiene solución. Para hallar la matriz X hacemos sobre la identidad las opericaiones que nos llevaron de A a su forma reducida y la inversa de las que llevaron de B a la forma reducida:

$$Id \overset{H_{13}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{31}(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \overset{H_{23}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{H_1(1/2)H_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_2(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -3/2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -3/2 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{H_{21}1H_{31}(7)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3/2 & 1 & 5/2 \end{pmatrix} = X$$

13.– *Dado $a \in \mathbb{R}$ se definen las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5-a \end{pmatrix}$$

Determinar los valores de a para los cuáles las matrices A y B son congruentes. Para $a = 4$ hallar una matriz P inversible tal que $PAP^t = B$.

Para analizar si son congruentes estudiamos los signos de las formas diagonales que se obtienen al diagonalizar por congruencia, es decir, aplicando las mismas operaciones elementales fila y columna. Para la matriz A:

$$A \overset{H_{12}}{\longrightarrow}\overset{\mu_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-4 \end{pmatrix}$$

y por tanto:

- Si $a > 4$ aparecen dos signos positivos.

- Si $a = 4$ aparecen un signo positivo.

- Si $a < 4$ aparece un signo positivo y otro negativo.

Sobre la matriz B:

$$B \overset{H_{21}(-1)\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4-a \end{pmatrix}$$

y por tanto:

- Si $a < 4$ aparecen dos signos positivos. - Si $a = 4$ aparecen un signo positivo. - Si $a > 4$ aparece un signo positivo y otro negativo.

Deducimos que son congruentes si y sólo si $a = 4$.

La matriz P que cumple $PAP^t = B$, es la que representa las operaciones filas hechas para pasar de A a B. Equivalentemente las de A a la forma diagonal, y luego las de esa misma forma diagonal hasta B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{(H_{21}(-1))^{-1}=H_{21}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

14.– *Dar un ejemplo de tres matrices $A, B, C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ simétricas, inversibles y no diagonales, de manera que A y B sean congruentes, pero C no sea congruente con A. Justificar la respuesta.*

Dos matrices simétricas reales son congruentes si y sólo si una se obtiene de la otra multiplicando a un lado por una matriz inversible y al otro por su traspuesta; equivalentemente si se pasa de una a la otra haciendo operaciones elementales fila y exactamente las mismas en columna; equivalentemente si al ser diagonalizadas por congruencia se obtienen el mismo número de signos positivos y negativos en la diagonal. Además la congruencia conserva el rango.

Entonces para construir A y B congruentes partimos de la identidad (que es inversible y por tanto también lo será cualquier matriz congruente con ella) y realizamos operaciones elementales fila y las mismas en columna de dos maneras diferentes:

$$Id \overset{H_{21}(1)\mu_{21}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

$$Id \overset{H_{31}(1)\mu_{31}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

Para construir una matriz C no congruente con las anteriores e inversibles partimos de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y realizamos una operación fila y la misma en columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1)\mu_{21}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = C.$$

I.– *Demostrar que las matrices:*

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}\ \ y\ B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&4\end{pmatrix},$$

son congruentes. Dar una matriz P inversible tal que $B=P^tAP$.

Dos matrices simétricas del mismo tamaño son congruentes si y sólo si al ser diagonalizadas por congruencia (mismas operaciones elementales fila que columna) aparecen los mismos signos en la diagonal.

Diagonalizamos ambas matrices para verificarlo:

$$A\overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}\overset{H_{32}(-2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(-2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$B\overset{H_{12}}{\longrightarrow}\overset{\mu_{12}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&4\end{pmatrix}\overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}\overset{H_{32}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

En ambos casos hemos obtenido dos signos positivos y uno negativo en la diagonal, luego si son congruentes.

Para hallar la matriz de paso P completamos la diagonalización de B para llegar exactamente a la misma forma diagonal que en A:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\overset{H_3(1/2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_3(1/2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{H_{23}}{\longrightarrow}\overset{\mu_{23}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Ahora realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hemos hecho para pasar de A a su forma diagonal y la inversa (y en orden inverso) de las operaciones columna que hemos hecho para pasar de B a su forma diagonal:

$$Id\overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{\mu_{32}(-2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{\mu_{23}^{-1}=\mu_{23}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&1\\0&1&0\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\overset{\mu_3(1/2)^{-1}=\mu_3(2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-2&2\\0&1&0\end{pmatrix}\overset{\mu_{32}(-1)^{-1}=\mu_{32}(1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\overset{\mu_{21}(-1)^{-1}=\mu_{21}(1)}{\longrightarrow}\quad\overset{\mu_{31}(-1)^{-1}=\mu_{31}(1)}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\overset{\mu_{12}^{-1}=\mu_{12}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=P$$

II.– *Se consideran la matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 & m \\ 1-m & m & 0 & 1 \\ m-1 & 1 & m & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar m para que las matrices A y M sean equivalentes.

Dos matrices son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango. Veamos primero cual es el rango de A:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que la tercera fila es nula y el menor formado por las dos primeras filas y columnas es no nulo. Por tanto el rango de A es 2. Entonces sólo tenemos que hallar m para que $rango(M) = 2$. Una condición necesaria (aunque no sufciente) para que esto ocurra es que algun menor de orden 3 sea nulo. Consideramos el formado por las tres últimas filas y columnas:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} \quad \iff \quad m^3 + 1 = 0 \quad \iff \quad m = -1.$$

Para $m = -1$ la matriz M queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La última fila es nula y el menor formado por las dos primeras fila y las columnas dos y tres es no nulo. Por tanto el rango es 2.

En definitiva A y M son equivalentes si $m = -1$.

III.– *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se definen las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar los valores de a y b para los cuales la matriz A es equivalente por filas a B y equivalente por columnas a C.

Observamos que el rango de C es dos, luego una condición necesaria para que A sea equivalente por columna con C es que tenga rango 2 y por tanto su determinante ha de ser nulo.

$$det(A) = a - b$$

Por tanto ha de cumplirse que $a = b$.

Observamos que la matriz B ya está reducida por filas. Ahora reducimos por filas la matriz A:

$$A \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a = 0$ queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq B$$

y vemos que A y B no son equivalentes por filas.

Si $a \neq 0$ queda:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_1(1/a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Coincide con B cuando $1/a = a$, es decir, cuando $a = \pm 1$.

Finalmente reducimos por columnas la matriz A para ver cuando coincide con C:

$$A \overset{\mu_{13}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \overset{\mu_{31}(-a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mu_{12}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Por tanto A siempre es equivalente por columnas a C.

La conclusión es que A es equivalente por filas a B y por columnas a C si y sólo si $a = b = \pm 1$.

IV.– *Dada la matriz:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$$

(a) *Hallar todos los valores de a, b para los cuáles B diagonaliza por congruencia.*

Para que una matriz cuadrada diagonalice por congruencia la condición necesaria y suficiente es que sea simétrica. Por tanto basta exigir $a = -1$.

(b) *Hallar todos los valores de a, b para los cuáles B es congruente en $\mathbb{R}$ con:*

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Por lo dicho en (a), sabemos que $a = -1$. Además dos matrices diagonales de la misma dimensión son congruentes en $\mathbb{R}$ si y sólo si tienen el mismo número de términos positivos y negativos en la diagonal. Ahora diagonalizamos la matriz B dada, para ver los signos de los términos que aparecen en la diagonal:

$$B \overset{H_{21}(-2)\nu_{21}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & b \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1/3)\nu_{32}(-1/3)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & b+1/3 \end{pmatrix}$$

Como la segunda matriz indicada tiene dos números positivos en la diagonal y uno negativo, para que sea congruente a la dada tiene que cumplirse que $b + 1/3 < 0$, es decir, $b < -1/3$.

(c) *Hallar todos los valores de a, b para los cuáles B es congruente en $\mathbb{R}$ con la identidad.*

Por lo visto en el apartado anterior es imposible que B sea congruente en la identidad, porque en su forma diagonal siempre aparece al menos un elemento con signo negativo.

V.– *Dado $k \in \mathbb{R}$, se consideran las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}.$$

Explicar de manera razonada si cada una de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.

i) *Si $k = 1$ son congruentes.*

FALSO. Si $k=1$ se tiene $rango(A)=1$, pero $rango(B)=2$. Dos matrices congruentes debieran de tener el mismo rango.

ii) *Para $k=2$ son equivalentes por filas.*

FALSO. Para cada una de ellas hallamos la forma reducida por filas:

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1/2\\0&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}.$$

No coinciden y por tanto no son equivalentes por filas.

ii) Para $k=2$ son equivalentes por columnas.

FALSO. Para cada una de ellas hallamos la forma reducida por columnas:

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}.$$

No coinciden y por tanto no son equivalentes por columnas.

VI.– *Sean las matrices reales:*

$$A=\begin{pmatrix}-1&2\\2&1\\3&-1\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}-1&-3\\1&2\\1&1\end{pmatrix};$$

¿Es posible encontrar una matriz inversible $X\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $AX=B$?.

Multiplicar la matriz A por la derecha por una matriz inversible X consiste en hacer operaciones elementales columna. Por tanto la cuestión es si A y B son equivalentes por columnas. Tenemos:

$$A\overset{\nu_{21}(2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}-1&0\\2&5\\3&5\end{pmatrix}\overset{\nu_1(-1)}{\longrightarrow}\overset{\nu_2(1/5)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\\-3&1\end{pmatrix}\overset{\nu_{12}(2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

y por otra parte:

$$B\overset{\nu_1(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&-3\\-1&2\\-1&1\end{pmatrix}\overset{\nu_{21}(3)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\\-1&-2\end{pmatrix}\overset{\nu_{12}(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\1&-2\end{pmatrix}\overset{\nu_1(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{pmatrix}$$

Luego A y B no son equivalentes por columnas.

¿Y una matriz inversible $Y\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $YA=B$?. Razonar las respuestas.

Ahora hay que ver si son equivalentes por filas:

$$A=\begin{pmatrix}-1&2\\2&1\\3&-1\end{pmatrix}\overset{\substack{H_{21}(2)\\H_{31}(3)}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}-1&2\\0&5\\0&5\end{pmatrix}\overset{\substack{H_{32}(-1)\\H_2(1/5)}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\overset{H_{12}(-2)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\overset{H_1(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

y para la otra matriz:

$$B=\begin{pmatrix}-1&-3\\1&2\\1&1\end{pmatrix}\overset{\substack{H_{21}(1)\\H_{31}(1)}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}-1&-3\\0&-1\\0&-2\end{pmatrix}\overset{\substack{H_{12}(-3)\\H_{32}(-2)}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\\0&0\end{pmatrix}\overset{\substack{H_1(-1)\\H_2(-1)}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

Luego vemos que son equivalentes filas.

VII.– *Obtener mediante transformaciones elementales y cuando sea posible, la inversa de las matriz:*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & a \end{pmatrix}$$

En primer lugar observamos que el determinante de la matriz es a^n. Por tanto la matriz es inversible si y sólo si $a \neq 0$.

Trabajamos bajo el supuesto de que $a \neq 0$. Para hallar la inversa hacemos la reducción por filas hasta llegar a la identidad; la matriz inversa se obtiene realizando las mismas operaciones sobre la matriz identidad. Podemos hacer ambos procesos al mismo tiempo:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sumamos ahora la primera fila multiplicada por b/a a la segunda ; luego la segunda multiplicada por b/a a la tercera y así sucesivamente. Suponiendo que es una matriz $n \times n$, queda:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & b/a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & b^2/a^2 & b/a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & b^{n-2}/a^{n-2} & b^{n-3}/a^{n-3} & b^{n-4}/a^{n-4} & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b^{n-1}/a^{n-1} & b^{n-2}/a^{n-2} & b^{n-3}/a^{n-3} & \dots & b/a & 1 \end{array}\right)$$

y ahora dividiendo cada fila por a:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b/a^2 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & b^2/a^3 & b/a^2 & 1/a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & b^{n-2}/a^{n-1} & b^{n-3}/a^{n-2} & b^{n-4}/a^{n-3} & \dots & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b^{n-1}/a^n & b^{n-2}/a^{n-1} & b^{n-3}/a^{n-2} & \dots & b/a^2 & 1/a \end{array}\right)$$

VIII.– *Obtener la forma canónica de la siguiente matriz respecto de la congruencia sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$ *y sobre el cuerpo* $\mathbb{C}$*, así como las matrices de paso:*

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Es una matriz simétrica. Para reducir por congruencia, las operaciones que hagamos por filas las hacemos también a las columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1/3)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{21}(-1/3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{31}(3/2)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{31}(3/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{H_1(1/\sqrt{6})}{\longrightarrow} \overset{\nu_1(1/\sqrt{6})}{\longrightarrow} \overset{H_2(\sqrt{3}/2)}{\longrightarrow} \overset{\nu_2(\sqrt{3}/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta es la forma canónica por congruencia sobre $\mathbb{R}$. En este caso coincide con la forma canónica compleja, porque todos los términos de la diagonal son no negativos. Serían diferente si apareciese algún -1 en la forma canónica en $\mathbb{R}$.

Para calcular la matriz P de paso de manera que $A = PCP^t$, basta hacer las operaciones *por fila* que le hemos hecho a A sobre la identidad. De esta forma obtenemos:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/6 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

IX.– *Sean $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dos matrices con el mismo determinante y la misma traza. ¿Es posible que A y B no sean equivalentes?. ¿Y si además son simétricas?. Razona las respuestas.*

Dos matrices $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango.

Para que NO sean equivalentes puede ocurrir:

i) Que una tenga rango dos y otra no.

Pero entonces no se cumpliría que tienen el mismo determimante (uno sería nulo y el otro no).

ii) Que una tenga rango uno y otra rango cero. Pero entonces la de rango uno tiene que tener traza cero. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \Omega.$$

Luego si puede ocurrir que tengan el mismo determimante y la misma traza, pero no sean equivalentes.

Sin embargo si son simétricas, se tiene que toda matriz simétrica de traza nula es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Si exigimos que su determinante sea además nulo:

$$0 = det(A) = -a^2 - b^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = b = 0.$$

Llegamos a que $A = \Omega$, luego ambas tendrían rango 0.

Por tanto deducimos que dos matrices $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ simétricas y con el mismo determinante y traza siempre son equivalentes.

X.– *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) *Estudiar que parejas de matrices son equivalentes.*

Dos matrices de igual dimensión son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango. Estudiamos el rango de cada una de ellas:

* $det(A) = -1 \neq 0$ por tanto $rango(A) = 2$.

* $det(B) = det(C) = det(D) = 0$ y como ninguna de ellas es la matriz nula, $rango(B) = rango(C) = rango(D) = 1$.

Por tanto B, C, D son equivalentes entres si; pero A no es equivalente ni con B, ni con C, ni con D.

(ii) *Estudiar que parejas de matrices son semejantes.*

Una condición necesaria para que sean semejantes es que tengan el mismo rango. Luego ya sabemos que A no es semejante a ninguna de las otras tres.

Veamos que ocurre con B, C y D. Otra condición necesaria para la semejanza es que las matrices tengan la misma traza. Se tiene que:

$$traza(B) = 8, \quad traza(C) = 8, \quad traza(D) = 2$$

Por tanto D no es semejante ni a B ni a C.

Resta ver que ocurre con las parejas (B, C). Para que sean semejantes deberían de tener los mismos autovalores (es una condición necesaria, aunque no suficiente).

Calculamos los autovalores de B:

$$det(B - \lambda Id) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda(\lambda - 8) = 0.$$

Por tanto sus autovalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 8$ con multiplicidad algebraica 1 (y también geométrica). Deducimos que B diagonaliza por semejanza a una matriz diagonal con autovalores 0 y 8; pero tal matriz es precisamente la matriz C luego son semejantes.

(iii) *Estudiar que parejas de matrices son congruentes, dando para cada una de ellas la correspondiente matriz de paso por congruencia.*

Una condición necesaria para la congruencia es que tengan el mismo rango. Por tanto de nuevo A no es congruente con B, C ó D. Además la congruencia conseva la simetría. Como B no es simétrica y C y D si lo son, la primera tampoco puede ser conguente con las dos últimas. Resta ver que ocurre con C y D: serán congruentes si al diagonalizarlas por congruencia llegamos a la misma signatura:

C ya es diagonal.

La matriz D la diagonalizamos realizando las mismas operaciones por fila que por columna:

$$D \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow} \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_1(\sqrt{8})}{\longrightarrow} \overset{\mu 1(\sqrt{8})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Vemos que las dos tienen signatura $(1, 0)$ y por tanto son congruentes. La matriz de paso P tal que $PDP^t = C$ se obtiene haciendo sobre la identidad las mismas operaciones fila que hicimos para llegar de D a C:

$$Id \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_1(\sqrt{8})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P$$

XI.– *Discutir y, en su caso, resolver, en función de los parámetros correspondientes, el sistema de ecuaciones:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + 2z & = & 2 \\ 5x + 2y & = & 1 \\ x - 2y + bz & = & 3 \end{array} \right.$$

Escribimos la matriz asociada al sistema y la ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ x & -2 & b \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ x & -2 & b & 3 \end{pmatrix}$$

Estudiamos los rangos en función de a y b. Tenemos $|A| = 2(12 - ab)$. Luego:

- Si $ab \neq 12$, entonces $rango(A) = rango(\overline{A}) = 3$. Coincide con el número de incógintas por lo que el sistema es compatible determinado.

Resolviéndolo por Kramer se obtiene:

$$x = \frac{2(b-4)}{12 - ab}; \qquad y = \frac{ab - 10b + 28}{24 - 2ab}; \qquad z = \frac{4(a-3)}{12 - ab}.$$

Si $ab = 12$, el rango de A es 2, porque el menor formado por las dos primeras filas y columnas siempre tiene determinante no nulo. El rango de $\overline{A}$, sin embargo, puede ser 3, si hay algún menor de orden 3 que tenga determinante nulo. Vemos que esto ocurre exactamente si $a \neq 3$. Es decir:

- Si $ab = 12$ pero $a \neq 3$, entonces el sistema es incompatible.

- Si $a = 3$ y $b = 4$, el sistema es compatible indeterminado. De las dos primeras ecuaciones se obtiene:

$$x = \frac{2(1-\lambda)}{3}; \qquad y = \frac{-7+10\lambda}{6}; \qquad z = \lambda.$$

XII.– *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) *Si $det(A) \neq 0$ y además A y B son equivalentes por filas entonces también son equivalentes por columnas.*

VERDADERO. Si $det(A) \neq 0$ entonces $rango(A) = 2$. Si A y B son equivalentes por filas entonces $rango(B) = rango(A) = 2$ y así B también es inversible. Pero toda matriz inversible es equivalente tanto por filas como por columnas a la identidad. Por tanto A y B son equivalentes por columnas con la identidad y por tanto equivalentes por columnas entre si.

(ii) *Si $det(A) = det(B) = 0$ entonces A y B son equivalentes.*

FALSO. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ambas son de determinante nulo, pero $rango(A) = 0$ y rango $(B) = 1$. Por tanto NO son equivalentes por tener distinto rango.

(iii) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

FALSO. Notamos que:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Para que se diese la igualdad propuesta tendría que cumplirse que $AB = BA$, es decir, que las matrices conmutasen. Pero esto no siempre ocurre. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pero:

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) *Si A y B son congruentes entonces $signo(traza(A)) = signo(traza(B))$.*

FALSO. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

son congruentes porque son diagonales con los mismos signos en la diagonal, pero:

$$signo(traza(A)) = signo(2 - 1) = signo(1) = +1$$
$$signo(traza(B)) = signo(1 - 2) = signo(-1) = -1$$
