ÁLGEBRA LINEAL I — Soluciones a la Práctica 3

Matrices y determinantes — (Curso 2025–2026)

1.– *En el conjunto de las matrices $n \times n$ de elementos reales, demostrar que el producto de matrices triangulares inferiores es otra matriz triangular inferior.*

Sean A y B dos matrices triangulares inferiores. Verifican $a_{ij} = b_{ij} = 0$ cuando $i < j$. Queremos ver que $C = AB$ es triangular inferior. Para ello hay que comprobar que $c_{ij} = 0$ cuando $i < j$.

Sea $i < j$; por la definición de producto de matrices, el término c_{ij} es:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Separamos esta sumatorio en dos:

$$c_{ij} = (\sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{kj}) + (\sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{kj})$$

En el primer sumatorio $k \leq i < j$ y como B es triangular inferior, entonces $b_{kj} = 0$. Vemos que este primer sumando es 0. En el segundo sumatorio $i < k$ y como A es triangular inferior, entonces $a_{ik} = 0$. Por tanto este segundo sumando es también cero. Deducimos que $c_{ij} = 0$ para cualquier $i < j$ y así, $C = AB$ es triangular inferior.

(Primer parcial, febrero 2000)

9.– *Sean $A, B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ dos matrices. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:*

(ii) *Si $rango(A) = 1$ entonces A tiene todas las filas nulas menos una.*

FALSO. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 1 porque las dos filas son iguales, pero no tiene todas las filas nulas menos una.

(iv) *Si B es inversible, $rango(AB^t) = rango(A)$.*

VERDADERO. Si B es inversible, entonces su traspuesta también lo es. Multiplicar a la derecha por una matriz inversible conserva rango, ya que equivale a hacer opeaciones elementales columna y las operaciones elementales conservan el rango.

11.– *Calcular razonadamente los siguientes determinantes:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{vmatrix}.$$

El primero puede desarollarse por Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 5 = 16.$$

También se podría desarrollar por adjuntos. Es cómodo por la primera fila (porque tiene un elemento nulo):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot (1 \cdot 5 - 1 \cdot 4) + 3 \cdot (2 \cdot 4 - 1 \cdot 3) = 16.$$

O primero haber hecho "ceros" mediante operaiones fila y/o columna. Restando a la tercera columna la primera por tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-5) \cdot 4 = 16.$$

El segundo puede ser desarrollado por adjuntos. Elegimos la segunda columna porque tiene dos ceros. Los menores multiplicados por cero ya no los escribimos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Cada uno de los determinantes 3×3 puede ser desarrollado por Sarrus, por adjuntos o previamente simplificado mediante operaciones elementales:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1.$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (5 - 6) = 1.$$

Por tanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3.$$

Para resolver el tercero lo simplificamos medianta operaciones elementales. Restamos a cada columna la anterior multiplicada por 10 y queda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \end{vmatrix} = 160.$$

12.– *Sabiendo que* $det \begin{pmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{pmatrix} = 5$ *calcular:*

(ii) $det \begin{pmatrix} b & 5 & 0 \\ 4 & c+2 & 2 \\ a+2 & 2a+1 & 2a \end{pmatrix}$.

Sacamos factor común a 2 a la tecera columna; multiplicada por 1 y por 2 se la restamos a las primeras:

$$2\begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ 4 & c+2 & 1 \\ a+2 & 2a+1 & a \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ 3 & c & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} b & 0 & 5 \\ 3 & 1 & c \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & 1 & c \\ b & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ b & 0 & 5 \\ 3 & 1 & c \end{vmatrix} = -2det\begin{pmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{pmatrix}^t = -2\cdot 5 = -10.$$

13.– *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$ *se define la matriz* 4×4*:*

$$A = \begin{pmatrix} b & b & b & a \\ b & b & a & b \\ b & a & b & b \\ a & b & b & b \end{pmatrix}$$

(i) *Calcular* $det(A)$ *y* $traza(A)$ *en función de* a *y* b*.*

Para calcular el determinantes comenzamos sumando a la primera fila todas las demás. Sabemos que el determinante no varía:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3b+a & 3b+a & 3b+a & 3b+a \\ b & b & a & b \\ b & a & b & b \\ a & b & b & b \end{vmatrix} = (3b+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & b & a & b \\ b & a & b & b \\ a & b & b & b \end{vmatrix}$$

Ahora restamos la primera fila multiplicada por b a las demás:

$$|A| = (3b+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ a-b & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Cambiamos de orden la primera y cuarta fila y la segunda y tercera (cada cambio supone invertir el signo; al hacer dos queda igual):

$$|A| = (3b+a)\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3b+a)(a-b)^3$$

La traza es la suma de los elementos de la diagonal:

$$traza(A) = b+b+b+b = 4b.$$

(ii) *Estudiar el rango de* A *en función de los valores de* a *y* b*.*

Si el determinante es no nulo el rango es el máximo posible, como $det(A) = (3b+a)(a-b)^3$:

- Si $a \neq -3b$ y $a \neq b$ entonces $rango(A) = 4$.

- Si $a = b$ la matriz queda:

$$A = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

Tiene todas las filas iguales y por tanto el rango es 1 si $b \neq 0$ o 0 si $b = 0$.

- Si $a = -3b \neq 0$ podemos reproducir las operaciones hechas para hallar el determiante sumando a la primera fila las demás. Queda (poniendo $-3b$ en lugar de a:

$$rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & -3b & b \\ b & -3b & b & b \\ -3b & b & b & b \end{pmatrix}$$

La primera fila no cuenta para el rango. La eliminamos. Podemos dividir la matriz por $b \neq 0$ y luego a la segunda y tercera fila respectivamente restarle la primera a la segunda y sumársela por tres a la tercera:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = 3$$

En resumen:

- Si Si $a \neq -3b$ y $a \neq b$ entonces $rango(A) = 4$.

- Si $a = -3b \neq 0$, entonces $rango(A) = 3$.

- Si $a = b \neq 0$, entonces $rango(A) = 1$.

- Si $a = b = 0$, entonces $rango(A) = 0$.

(iii) *Hallar a y b para que $det(AA^t) = 0$.*

Se tiene que $det(AA^t) = det(A)det(A^t) = det(A^2) = 0$. Por tanto se trata de hallar a para que $det(A) = 0$. Según vimos en el primer apartado esto equivale a:

$$(a + 3b)(a - b)^3 = 0$$

es decir $a = -3b$ ó $a = b$.

14.– *Dado $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:*

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} 0 \ si \ i = j + 1 \\ \\ i \ si \ i \neq j + 1 \end{cases}$$

(i) Escribir la matriz P_4.

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(ii) *Hallar el determinante de P_4.*

Lo resolvemos en general en el siguiente apartado.

(iii) *En general hallar $det(P_n)$.*

Tenemos:

$$|P_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 \\ n & n & n & \dots & 0 & n \end{vmatrix}$$

En cada fila i-ésima sacamas factor común i. Queda:

$$|P_n| = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Restamos la primera fila a las demás:

$$|P_n| = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la última columna queda:

$$|P_n| = n!(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = n!(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = n!(-1)^{2n} = n!$$

Por tanto $det(P_4) = 4! = 24$.

15.– *Dado $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{R}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:*

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} k \ si \ i = j \\ 1 \ si \ i \neq j \end{cases}$$

(i) *Escribir la matriz P_4 y hallar $det(P_4)$ y $rango(P_4)$ en función de k.*

Tenemos:

$$P_4 = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

El determinante y el rango lo calcularemos en el siguiente apartado de manera general.

(ii) *Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$ y $rango(P_n)$ en función de n y k.*

$$P_n = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & k \end{pmatrix}$$

Para hallar el determinante comenzamos sumando a la primera fila todas las demás (el valor del determinante se mantiene) (*):

$$|P_n| = \begin{vmatrix} k+n-1 & k+n-1 & k+n-1 & \dots & k+n-1 & k+n-1 \\ 1 & k & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & k \end{vmatrix}$$

Si $k+n-1 = 0$ la primera fila es nula y por tanto el determinante es nulo. En otro caso sacamos factor común $k+n-1$ en la primera fila:

$$|P_n| = (k+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & k \end{vmatrix}$$

(notamos que la expresión es también válida para $k+n-1 = 0$ ya que en ese caso da cero). Restamos la primera fila a todas las demás:

$$|P_n| = (k+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+n-1)(k-1)^{n-1}.$$

Por tanto $|P_n| = (k+n-1)(k-1)^{n-1}$ y en particular $|P_4| = (k+3)(k-1)^3$.

En cuanto al rango, sabemos que es máximo si $|P_n| \neq 0$, es decir si $k+n-1 \neq 0$ y $k-1 \neq 0$.

Estudiamos esos dos casos particulares.

- Si $k = 1$ la matriz original tiene todas las filas iguales (formadas por unos) por tanto el rango es 1 ya que todas las filas son dependientes de la primera.

- Si $k = 1-n \leq 0$ entonces tras sumar todas las filas a la primera queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & k \end{pmatrix}$$

La primera fila es nula y por tano $rango(P_n) < n$ (**). Restando la primera columna a todas las demás queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k-1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & k-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

La submatriz formada por las últimas $n-1$ filas y columnas es diagonal de determinante $(k-1)^{n-1} \neq 0$ (porque $k-1 = 1-n-1 = -n \neq 0$) y por tanto $rango(P_n) \geq n-1$. Junto con (**) concluimos que $rango(P_n) = n-1$.

En resumen:

$$rango(P_n) = \begin{cases} n \text{ si } k \neq 1-n, 1 \\ n-1 \text{ si } k = 1-n \\ 1 \text{ si } k = 1 \end{cases}$$

16.– *Dado $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:*

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} i \ si \ j \leq n+1-i \\ \\ 0 \ si \ j > n+1-i \end{cases}$$

(i) *Escribir la matriz P_5 y hallar su determinante.*

En cada fila i los términos valen i hasta la columna $5+1-i$ (incluída), a partir de la cuál se anulan. Por ejemplo en la primera fila valen 1 hasta la columna $5+1-1=5$; en la segunda fila valen 2 hasta la columna $5+1-2=4$; y así sucesivamente. Queda:

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para hallar el determinante reordenamos las filas para conseguir una matriz triangular, cuyo determinante es el producto de los términos de la diagonal. Cada cambio de orden de dos filas supone un cambio de signo. En concreto cambiamos de orden la primera y quinta fila y la segunda y la tercera. Como cambiamos de orden un número par de veces el signo no varía. Queda:

$$det(P_5) = det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120.$$

(ii) *Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$ y $traza(P_n)$.*

Teniendo en cuenta la descripción de la matriz dada y la interpretación de la misma que indicamos en el apartado anterior tenemos:

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-2 & n-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para hallar su determinante reordenaremos las filas; la idea es ponerlas justo en el orden opuesto al que tienen para conseguir una matriz triangular.

Para ello llevamos la primera fila a la última posición pero paso a paso, primero cambiando las filas 1 y 2, luego 2 y 3, luego 3 y 4 y asísucesivamente. Tras hacer $n-1$ cambios queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Después hacemos lo mismo con la primera de doses "bajándola" de fila en fila hasta la penúltima mediante $n-2$ cambios de fila, y así con las demás hasta llegar a:

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n-2 & n-2 & n-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El total de cambios de posición de filas es:

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1 = \frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Por tanto:

$$det\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n-2 & n-2 & n-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{\dfrac{n(n-1)}{2}} n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = (-1)^{\dfrac{n(n-1)}{2}} n!.$$

Finalmente calculamos la traza que es la suma de los términos de la diagonal $traza(P_n) = \sum_{i=1}^{n}(P_n)_{ii}$. Nos fijamos en que:

$$(P_n)_{ii} = \begin{cases} i \text{ si } i \leq n+1-i \\ \\ 0 \text{ si } i > n+1-i \end{cases} = \begin{cases} i \text{ si } 2i \leq n+1 \\ \\ 0 \text{ si } 2i > n+1 \end{cases}$$

es decir los elementos de la digonal no son nulos mientras $2i \leq n+1$. Por tanto:

- Si n es impar, los términos de la diagonal no son nulos hasta la fila $i = (n+1)/2$. Queda:

$$traza(P_n) = \sum_{i=1}^{n}(P_n)_{ii} = \sum_{i=1}^{(n+1)/2}(P_n)_i = \frac{1+(n+1)/2}{2}\cdot\frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)(n+3)}{8}$$

- Si n es par, los términos de la diagonal no son nulos hasta la fila $i = n/2$. Queda:

$$traza(P_n) = \sum_{i=1}^{n}(P_n)_{ii} = \sum_{i=1}^{n/2}(P_n)_i = \frac{1+n/2}{2}\cdot\frac{n}{2} = \frac{n(n+2)}{8}$$

I.– *En el conjunto de las matrices $n \times n$ de elementos reales, demostrar que si $AA^T = \Omega$, entonces $A = \Omega$.*

Llamemos $B = A^T$. Entonces por definición de traspuesta, $b_{ij} = a_{ji}$. Ahora por hipotésis $\Omega = AA^t = AB$. Haciendo el producto vemos que para cualquier i, j con, $1 \leq i, j \leq n$:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik} a_{jk}$$

En particular, si $i = j$:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_{ik} a_{ik} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}^2$$

Por ser A una matriz con coeficientes reales, los cuadrados a_{ik}^2 son siempre números no negativos. Si su suma es cero, todos ellos han de ser cero, y deducimos que $a_{ik} = 0$ para cualquier i, k con, $1 \leq i, k \leq n$. Por tanto $A = \Omega$.

(Primer parcial, febrero 2000)

II.– *Calcular las potencias n-simas de las siguientes matrices:*

El método (*¡de momento!*) más usual es hacer "a mano" las primeras potencias y luego encontrar una regla general:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos las primeras potencias

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \ldots$$

Parece razonable pensar que, en general:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hay que comprobarlo. Se hace por inducción. Para ello:

- Vemos que se cumple para A^1.

- Comprobamos que, si suponemos cierta la fórmula para $n-1$, entonces se cumple para n, es decir:

$$A^n = A \cdot A^{n-1} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 2(n-1) & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos las primeras potencias:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = (-4)Id$$

Ahora es fácil continuar porque:

$$B^5 = B \cdot B^4 = (-4)B; \quad B^6 = (-4)B^2; \quad B^7 = (-4)B^3; \quad B^8 = (-4)^2 Id; \quad \dots$$

En general, el exponente n siempre lo podemos escribir como $n = 4d + r$ donde r es el resto de dividir n entre 4 y por tanto es un número entero comprendido entre 0 y 3. Tendremos:

$$B^n = B^{4d+r} = (B^4)^d \cdot B^r = (-4)^d Id \cdot B^r = (-4)^d B^r$$

En definitiva escribimos el resultado dependiendo de los 4 posibles valores de r:

$$B^n = (-4)^d \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ si } n = 4d;$$

$$B^n = (-4)^d \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ si } n = 4d+1;$$

$$B^n = (-4)^d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ si } n = 4d+2;$$

$$B^n = (-4)^d \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \text{ si } n = 4d+3;$$

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hacemos las primeras potencias:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^3 = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix} = abc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paramos en la tercera potencia. Nos fijamos que $C^3 = abcId$. Ahora es muy fácil multiplicar por C^3. Podemos en general hacer lo siguiente. Dado $n > 0$, sabemos que $n = 3q + r$, donde q es el cociente y $r < 3$ es el resto de dividir n por 3. Por tanto:

$$C^n = C^{3q+r} = (C^3)^q C^r = (abcI)^q C^r = a^q b^q c^q C^r$$

y,

$$C^n = \begin{pmatrix} a^q b^q c^q & 0 & 0 \\ 0 & a^q b^q c^q & 0 \\ 0 & 0 & a^q b^q c^q \end{pmatrix}, \text{ si } n = 3q;$$

$$C^n = \begin{pmatrix} 0 & a^{q+1} b^q c^q & 0 \\ 0 & 0 & a^q + b^{q+1} c^q \\ a^q b^q c^{q+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ si } n = 3q+1;$$

$$C^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{q+1} b^{q+1} c^q \\ a^q b^{q+1} c^{q+1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{q+1} b^q c^{q+1} & 0 \end{pmatrix}, \text{ si } n = 3q+2.$$

(d) $D = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$. Hacemos las primeras potencias:

$$D^2 = \begin{pmatrix} a^4+a^2b^2+a^2c^2 & a^3b+ab^3+abc^2 & a^3c+ab^2c+ac^3 \\ a^3b+ab^3+abc^2 & a^2b^2+b^4+b^2c^2 & a^2bc+b^3c+bc^3 \\ a^3c+ab^2c+ac^3 & a^2bc+b^3c+bc^3 & a^2c^2+b^2c^2+c^4 \end{pmatrix} = (a^2+b^2+c^2)D$$

Ahora es fácil seguir haciendo las potencias de D, porque:

$$\begin{aligned} D^3 &= D^2D = (a^2+b^2+c^2)D^2 = (a^2+b^2+c^2)^2D \\ D^4 &= D^3D = (a^2+b^2+c^2)^2D^2 = (a^2+b^2+c^2)^3D \\ &\dots \end{aligned}$$

En general vemos que;

$$D^n = (a^2+b^2+c^2)^{n-1}D$$

De nuevo hay que comprobarlo por inducción:

- Para $n = 1$ es cierto, ya que $D^1 = (a^2+b^2+c^2)^{1-1}D = D$.

- Lo suponemos cierto para $n-1$ y lo probamos para n:

$$\begin{aligned} D^n = D^{n-1}\cdot D = (a^2+b^2+c^2)^{n-2}D\cdot D = (a^2+b^2+c^2)^{n-2}D^2 = \\ = (a^2+b^2+c^2)^{n-2}(a^2+b^2+c^2)D = (a^2+b^2+c^2)^{n-1}D. \end{aligned}$$

III.– *Para las siguientes familias de matrices no singulares de $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$, decidir si verifican alguna de las dos condiciones: (a) dada una matriz de la familia, su inversa también pertenece a la familia; (b) dadas dos matrices de la familia, su producto también pertenece a la familia.*

(1) *las matrices simétricas regulares,*

(a) CIERTO. Que sea regular simplemente significa que tiene inversa. Y una matriz simétrica es aquella que coincide con su traspuesta.

Hay que probar que si una matriz es simétrica su inversa es también simétrica.

Basta usar las propiedades de la trasposición: $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ pero por ser A simétrica $A^t = A$, luego $(A^{-1})^t = A^{-1}$ y por tanto la inversa es simétrica.

(b) FALSO. Dadas A, B simétricas, veamos si lo es AB. Tenemos $(AB)^t = B^tA^t$; por ser A, B simétricas deducimos que $(AB)^t = BA$. Teniendo en cuenta que el producto de matrices no es conmutativo, en general $BA \neq AB$ y por tanto AB no tiene porque ser simétrica. Veamos un ejemplo del de dos matrices simétricas cuyo prdoducto NO lo es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) *las matrices regulares que conmutan con una matriz dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$,*

(a) CIERTO. Supongamos que una matriz regular B conmuta con A. Veamos que también conmuta su inversa. Por conmutar A yB se tiene $AB = BA$. Multiplicando ambos términos, por la derecha y por la izquierda por B^{-1} tenemos, $B^{-1}ABB^{-1} = B^{-1}BAB^{-1}$. Y como $BB^{-1} = B^{-1}B = I$ queda, $B^{-1}A = AB^{-1}$.

(b) CIERTO. Supongamos que B y C conmutan con A. Veamos que entonces BC también conmuta con A:

$$(BC)A = B(CA) = B(AC) = (BA)C = A(BC)$$

(3) *las matrices ortogonales.*

Una matriz ortogonal es aquella cuya inversa es igual a su traspuesta.

(a) CIERTO. Sea A ortogonal ($A^t = A^{-1}$). Veamos que A^{-1} es ortogonal:

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$$

Vemos que su traspuesta coincide con su inversa y es ortogonal.

(b) CIERTO. Sean A, B ortogonales. Veamos que AB es ortogonal.

$$(AB)^t = B^t A^t = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

Luego vemos que su inversa coincide con su traspuesta.

IV.– *Sea A una matriz columna de orden $n \times 1$ tal que $A^tA = 1$ y $B = Id_n - 2AA^t$. Demostrar que:*

a) *B es simétrica*

Hay que comprobar que $B^t = B$. Pero:

$$B^t = (Id_n - 2AA^t)^t = Id_n^t - 2(AA^t)^t = Id_n - 2(A^t)^tA^t = Id_n - 2AA^t = B.$$

b) $B^{-1} = B^t$

Ahora veamos que $BB^t = Id$. Como $B^t = B$ tenemos:

$$BB^t = BB = (Id_n - 2AA^t)(Id_n - 2AA^t) = Id_n - 4AA^t + 4AA^tAA^t.$$

Ahora usamos que $A^tA = 1$:

$$BB^t = Id_n - 4AA^t + 4A\underbrace{(A^tA)}_{1}A^t = Id_n - 4AA^t + 4AA^t = Id_n.$$

(Primer parcial, enero 2008)

VI.– *Sea X una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ y elementos reales. Sea k un número par. Probar que si $X^k = -Id$, entonces n es también un número par.*

Si se cumple que $X^k = -Id$, aplicando determinantes obtenemos que

$$det(X^k) = det(-Id).$$

Pero $det(X^k) = det(X)^k$ y $det(-Id) = (-1)^n$. Por tanto:

$$det(X)^k = (-1)^n$$

Como k es par, $det(X)^k$ es positivo; entonces $(-1)^n$ ha de ser positivo y en consecuencia n tiene que ser un número par.

VII.– *Dada la matriz $m \times n$ con $m, n > 1$,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (m-1)n+1 & (m-1)n+2 & \dots & mn-1 & mn \end{pmatrix}$$

expresar a_{ij} en función de i y j, y calcular su rango.

El término a_{ij} es de la forma:

$$a_{ij} = j + (i-1)\cdot n$$

Para hallar el rango hacemos operaciones fila y columna sobre la matriz A.

Le restamos la primera fila a todas las demás:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (m-1)n & (m-1)n & \dots & (m-1)n & (m-1)n \end{pmatrix}$$

Ahora le restamos la primera columna a todas las demás:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (m-1)n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que las filas $3,\dots,m$ son proporcionales a la segunda. Por tanto el rango es a lo sumo 2. Para ver que el rango es exactamente 2 basta mostrar un menor 2×2 de determinante no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n & 0 \end{vmatrix} = -n.$$

VIII.– *Si* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix}$ *y* $det(A) = 3$, *calcular* $det(2C^{-1})$ *donde* $C = \begin{pmatrix} 2p & -a+u & 3u \\ 2q & -b+v & 3v \\ 2r & -c+w & 3w \end{pmatrix}$.

En primer lugar se tiene:

$$det(2C^{-1}) = 2^3 det(C^{-1}) = \frac{8}{det(C)}.$$

Ahora, aplicamos las propiedades de los determimantes para expresar el determinante de C en función del determinante de A. Sacamos factor común a 2 en la primera columna y a 3 en la última:

$$det(C) = 2\cdot 3\cdot det\begin{pmatrix} p & -a+u & u \\ q & -b+v & v \\ r & -c+w & w \end{pmatrix}$$

Le restamos la tercer columna a la segunda:

$$det(C) = 6\cdot det\begin{pmatrix} p & -a & u \\ q & -b & v \\ r & -c & w \end{pmatrix}$$

Cambiamos de signo la segunda columna (cambiando de signo del determinante):

$$det(C) = -6\cdot det\begin{pmatrix} p & a & u \\ q & b & v \\ r & c & w \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las dos primeras columnas (el determinante cambia de signo);

$$det(C) = 6\cdot det\begin{pmatrix} a & p & u \\ b & q & v \\ c & r & w \end{pmatrix} = 6det(A^t).$$

Finalmente el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta. Por tanto:

$$det(C) = 6det(A^t) = 6det(A) = 6\cdot 3 = 18.$$

y sustituyendo en la expresión de partida:

$$det(2C^{-1}) = 2^3 det(C^{-1}) = \frac{8}{det(C)} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$

IX.– *Calcular el siguiente determimante:*

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

¿ Para qué valores reales de $x_1, x_2, \dots, x_n$ se anula?.

Para hallar el determinante lo transformamos mediante operaciones elementales que conserven su valor. Sumaremos a la primera fila la segunda multiplicada por $-x_1$, la tercera por $-x_2$, la cuarta por $-x_3$ y así sucesivamente. Nos queda:

$$\begin{vmatrix} -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Es una matriz triangular; el determinante es el producto de los términos de la diagonal:

$$-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2.$$

El determinante se anula cuando:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0.$$

Pero como el cuadrado de un número es siempre no negativo, la única posibilidad para que se anule la suma de cuadrados es que todos los términos sean nulos, es decir:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

X.– *Dados $n \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ se considera la matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$:*

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a & a & \dots & a & a \\ a & a+b & a & \dots & a & a \\ a & a & a+b & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b & a \\ a & a & a & \dots & a & a+b \end{pmatrix}$$

(i) *Hallar $det(A)$ en función de a, b, n.*

(ii) *Hallar $rango(A)$ en función de a, b, n.*

Comenzamos haciendo operaciones elementales fila que conservan en rango y el determinante.

Restamos la primera columna a todas las demás:

$$\begin{pmatrix} a+b & -b & -b & \dots & -b & -b \\ a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \dots & b & 0 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \end{pmatrix}$$

Sumamos a la primera fila todas las demás:

$$\begin{pmatrix} na+b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \dots & b & 0 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \end{pmatrix}$$

La matriz es triangular. Por tanto su determinante es el producto de los términos de la diagonal:

$$det(A) = (na+b)b^{n-1}.$$

El rango (dado que está escalonada por columnas) es el número de columna no nulas.

- Si $b = 0$ y $a = 0$, la matriz es la matriz nula. Por tanto $rango(A) = 0$.

- Si $b = 0$ y $a \neq 0$, todas las columnas (de la forma escalonada) excepto la primera son nulas. Por tanto $rango(A) = 1$.

- Si $b \neq 0$, las $n-1$ últimas columnas son no nulas. El rango es al menos $n-1$. La primera columna será nula dependiendo de si $an + b = 0$. Deducimos:

– Si $b \neq 0$ y $a = -b/n$ entonces $rango(A) = n-1$.

– Si $b \neq 0$ y $a \neq -b/n$ entonces $rango(A) = n$.

XI.– *Hallar el siguiente determinante para* $n \geq 2$

$$A_n = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3 & \cdots & x_1+y_n \\ x_2+y_1 & x_2+y_2 & x_2+y_3 & \cdots & x_2+y_n \\ x_3+y_1 & x_3+y_2 & x_3+y_3 & \cdots & x_3+y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n+y_1 & x_n+y_2 & x_n+y_3 & \cdots & x_n+y_n \end{vmatrix}$$

Restamos a las filas $2, 3, \dots, n$ la primera fila. Queda:

$$A_n = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1-x_1 & \cdots & x_1-x_1 \\ x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 & \cdots & x_2-x_1 \\ x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_3-x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n-x_1 & x_n-x_1 & x_n-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \end{vmatrix}$$

Vemos que en cada fila $2, 3, \dots, n$ los términos son iguales. Por las propiedades del determinante, podemos sacarlos fuera:

$$A_n = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1) \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1-x_1 & \cdots & x_1-x_1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Entonces si $n > 2$, hay dos o más filas iguales y por tanto el determinante es 0.

Si $n = 2$ queda:

$$A_2 = (x_2-x_1) \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(y_1-y_2)$$

(Primer parcial, febrero 2003)

XII.– *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$

(i) *Hallar* AA^t.

Hacemos la traspuesta y luego el producto:

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix} =$$
$$= (a^2+b^2+c^2+d^2)Id$$

(ii) *Calcular* $det(AA^t)$ *y* $det(A)$.

$$det(AA^t) = det((a^2+b^2+c^2+d^2)Id) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4 det(Id) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

y por otra parte:

$$det(AA^t) = det(A)det(A^t) = det(A)det(A) = det(A)^2$$

Por tanto:

$$det(A) = \pm\sqrt{det(AA^t)} = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

Para decidir el signo notamos que si $b = c = d = 0$ entonces $A = aId$ y $det(A) = a^4 = (a^2)^2$. Por tanto nos quedamos con la raíz positiva.

$$det(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

(iii) *Determinar el rango de* A *en función de los valores de* a, b, c, d.

Si $det(A) \neq 0$ el rango es el máximo posible, es decir, 4. Pero:

$$det(A) = 0 \iff (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = 0 \iff a^2+b^2+c^2+d^2 = 0 \iff a = b = c = d = 0.$$

Pero si $a = b = c = d = 0$ entonces $A = 0$ y $rango(A) = 0$. Concluimos que:

$$rango(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } a = b = c = d = 0 \\ 4 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

XIII.– *Dado* $n \in \mathbb{N}$ *se define la matriz* $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *como:*

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } i \leq j \\ 1 \text{ si } i > j \end{cases}$$

(i) *Escribir la matriz* P_4 *y hallar su determinante.*

Por la defininción dada los elementos de la matriz uno si se encuentran en una fila mayor que la columna y valen el número de fila en el que están en otro caso. Por tanto:

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hallaremos el determinante en general en el apartado siguiente.

(ii) *Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$, $traza(P_n)$ y $det(P_n^{-1})$.*

Tenemos:

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{pmatrix}.$$

Para hallar el determinante a cada fila le restamos la primera.

$$det(P_n) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) = (n-1)!$$

Aplicado al apartado anterior:

$$det(P_4) = (4-1)! = 3! = 6.$$

La traza es la suma de los elementos de la diagonal:

$$traza(P_n) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Por último:

$$det(P_n^{-1}) = det(P_n)^{-1} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

XIV.– *Sea $n > 2$ y $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, una matriz inversible. Sea $adj(A)$ su matriz adjunta. Probar que:*

(a) $det(adj(A)) = det(A)^{n-1}$.

Sabemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A).$$

De donde:

$$adj(A) = det(A) \cdot A^{-1}.$$

Aplicando determinantes queda:

$$det(adj(A)) = det(det(A) \cdot A^{-1}) = det(A)^n det(A^{-1}) = \frac{det(A)^n}{det(A)} = det(A)^{n-1}.$$

(b) $adj(adj(A)) = det(A)^{n-2} \cdot A$.

Como antes sabemos que:

$$adj(A) = det(A) \cdot A^{-1}.$$

Entonces:

$$adj(adj(A)) = det(adj(A)) \cdot adj(A)^{-1} = det(A)^{n-1} \cdot (det(A) \cdot A^{-1})^{-1} = det(A)^{n-1} \cdot det(A)^{-1} \cdot A = det(A)^{n-2} \cdot A.$$

XV.– *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $rango(A) = 1$ entonces $rango(AB) \leq 1$.*

VERDADERO. Como $rango(A) = 1$ y $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se tiene que $det(A) = 0$. Entonces:

$$det(AB) = det(A)det(B) = 0 \cdot det(B) = 0$$

y así $rango(AB) < 2$, es decir, $rango(AB) \leq 1$.

(ii) *Si $rango(A) = rango(B)$ entonces $rango(AB) = rango(A)$.*

FALSO. Por ejemplo si $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $rango(AB) = rango(0) = 0 \neq 1 = rango(A)$.

(iii) $rango(A) + rango(B) = rango(A + B)$.

FALSO. Por ejemplo si $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $rango(A) + rango(B) = 2 + 2 = 4$ pero $rango(A + B) = 2$.

(iv) $rango(A) + rango(B) > rango(A + B)$.

FALSO. Por ejemplo si $A = B = 0$ entonces $rango(A) + rango(B) = 0 = rango(A + B)$.