ÁLGEBRA LINEAL I **Algunas soluciones a la Práctica 3**

Matrices y determinantes (Curso 2020–2021)

1.– *En el conjunto de las matrices $n \times n$ de elementos reales, demostrar que el producto de matrices triangulares inferiores es otra matriz triangular inferior.*

Sean A y B dos matrices triangulares inferiores. Verifican $a_{ij} = b_{ij} = 0$ cuando $i < j$. Queremos ver que $C = AB$ es triangular inferior. Para ello hay que comprobar que $c_{ij} = 0$ cuando $i < j$.

Sea $i < j$; por la definición de producto de matrices, el término c_{ij} es:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Separamos esta sumatorio en dos:

$$c_{ij} = (\sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{kj}) + (\sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{kj})$$

En el primer sumatorio $k \leq i < j$ y como B es triangular inferior, entonces $b_{kj} = 0$. Vemos que este primer sumando es 0. En el segundo sumatorio $i < k$ y como A es triangular inferior, entonces $a_{ik} = 0$. Por tanto este segundo sumando es también cero. Deducimos que $c_{ij} = 0$ para cualquier $i < j$ y así, $C = AB$ es triangular inferior.

(Primer parcial, febrero 2000)

4.– *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:*

(i) $AB = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$ *ó* $B = 0$.

FALSO. Basta considerar por ejemplo:

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son matrices no nulas pero sin embargo:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

FALSO. Sólo es cierto si A y B conmutan. Por ejemplo si tomamos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene:

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

pero

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Si C es inversible y $AB = C$ entonces A, B son inversibles.*

VERDADERO. Sabemos que una matriz es inversible si y sólo si su determinante es cero. Como C es inversible entonces $det(C) \neq 0$. Pero:

$$AB = C \qquad \Rightarrow \qquad det(AB) = det(C) \qquad \Rightarrow \qquad det(A)det(B) = det(C) \neq 0.$$

Si A ó B no fuesen inversibles su determinante sería cero y el producto $det(A)det(B)$ también, contradiciendo la condición anterior.

5.– *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada cumpliendo $A^2 + A + Id = 0$.*

(i) *Demostar que A es inversible.*

(ii) *Probar que $A^{-1} = -(A + Id) = A^2$.*

Resolvemos el apartado (i) y (ii) simultáneamente. Probaremos que $-(A + Id) \cdot A = Id$ y por tanto $-(A + Id)$ es la inversa de A y así A es inversible.

$$-(A + Id) \cdot A = -(A^2 + A) = -A^2 - A.$$

Pero por hipótesis:

$$A^2 + A + Id = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Id = -A^2 - A,$$

y por tanto:

$$-(A + Id) \cdot A = -(A^2 + A) = -A^2 - A = Id.$$

Nos piden probar también que $-(A + Id) = A^2$ pero es consecuencia directa de la hipótesis:

$$A^2 + A + Id = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A^2 = -A - Id = -(A + Id),$$

(iii) *¿Cuánto vale A^3? ¿Y A^{2013}?.*

En el apartado anterior hemos visto que $A^{-1} = A^2$ por tanto

$$A^3 = A^2 \cdot A = A^{-1} \cdot A = Id.$$

Ahora:

$$A^{2013} = A^{3\cdot 671} = (A^3)^{671} = Id^{671} = Id.$$

6.– *Hallar A^n, para $n \in \mathbb{N}$, donde:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Método I: Calculemos las potencias bajas de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ,\ldots$$

Nos fijamos en que la potencia n-sima de A parece tener la siguientes expresión:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El término en la posición $1,3$ corresponde a la suma de los $n-1$ primeros números enteros positivos:

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Utilizando inducción, probemos que esta fórmula es cierta:

- Para $n=1$ está claro que se cumple.

- Supongamos que es cierta para $n-1$ y probémosla para n:

$$A^n = A^{n-1}\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Método II: Descomponemos A como:

$$A = Id + B; \qquad \text{con} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que Id y B conmutan podemos aplicar la fórmula del binomio de Newton:

$$A^n = (Id+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k Id^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k.$$

Pero:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B^3 = B^2\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Omega,$$

y por tanto en general,

$$B^k = \Omega, \text{ si } k \geq 3.$$

La expresión anterior queda:

$$A^n = B^0 + nB^1 + \binom{n}{2}B^2 = Id + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.– *Dada la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+2 & x+1 \\ x+2 & x & x+4 \end{pmatrix}$$

(i) *Hallar x para que $det(A)=0$.*

Hacemos operaciones elementales que conservan el rango y el determinante. Comenzamos restando la primera fila a las demás:

$$\begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Restamos la primera columna a las otras dos:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente a la primera fila le sumamos la mitad de la segunda:

$$\begin{pmatrix} x+3/2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la primera fila el determinante queda:

$$det(A) = (x + \frac{3}{2}) \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -12(x + \frac{3}{2})$$

Deducimos que $det(A) = 0$ si y sólo si $x = -3/2$.

(ii) *Estudiar el rango de A en función de los valores de x.*

Si $x = 3/2$ el determinante es nulo. En ese caso además vimos que el menor formado por las dos últimas filas y columnas de la matriz:

$$\begin{pmatrix} x+3/2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene determinante non nulo. Por tanto el rango es 2.

Si $x \neq 3/2$ el determinante es no nulo y así la matriz tiene rango 3.

9.– *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $rango(A) = 1$ entonces $rango(AB) \leq 1$.*

VERDADERO. Como $rango(A) = 1$ y $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se tiene que $det(A) = 0$. Entonces:

$$det(AB) = det(A)det(B) = 0 \cdot det(B) = 0$$

y así $rango(AB) < 2$, es decir, $rango(AB) \leq 1$.

(ii) *Si $rango(A) = rango(B)$ entonces $rango(AB) = rango(A)$.*

FALSO. Por ejemplo si $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $rango(AB) = rango(0) = 0 \neq 1 = rango(A)$.

(iii) $rango(A) + rango(B) = rango(A + B)$.

FALSO. Por ejemplo si $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $rango(A) + rango(B) = 2 + 2 = 4$ pero $rango(A + B) = 2$.

(iv) $rango(A) + rango(B) > rango(A + B)$.

FALSO. Por ejemplo si $A = B = 0$ entonces $rango(A) + rango(B) = 0 = rango(A + B)$.

(1.2 puntos)

10.– *Sean $A, B, C \in M_{6\times 6}(\mathbb{R})$ matrices verificando $-ABA^t = CA + A$, $det(B) = 1$, A inversible. Sabiendo que C es una matriz diagonal con $c_{ii} = i$, calcular $det(A)$.*

Partimos de la expresión dada:

$$-ABA^t = CA + A \quad \Rightarrow \quad -ABA^t = (C + Id)A$$

Aplicamos determinantes a ambos lados:

$$det(-ABA^t) = det((C + Id)A)$$

Usamos que $det(kX) = k^n det(X)$ si X es de tamaño $n \times n$; además que el determinante del producto es el producto de determinantes y que el determinante de la traspuesta coincide con el determinante de la matriz de partida:

$$(-1)^6 det(ABA^t) = det(C+Id)det(A) \quad \Rightarrow \quad det(A)det(B)det(A^t) = det(C+Id)det(A) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad det(A)^2 det(B) = det(C+Id)det(A).$$

Cómo A es invsersible, $det(A) \neq 0$ y podemos simplificar:

$$det(A)det(B) = det(C+Id)$$

Como $det(B) = 1$:

$$det(A) = det(C+Id).$$

Para hallar $det(C+Id)$ tenemos en cuenta que es una matriz diagonal por ser suma de matrices diagonales. Por tanto su determinante es el producto de los términos de la diagonal:

$$det(A) = det(C+Id) = (c_{11}+1)(c_{22}+1)(c_{33}+1)(c_{44}+1)(c_{55}+1)(c_{66}+1) =$$
$$= (1+1)(2+1)(3+1)(4+1)(5+1)(6+1) = 7! = 5040.$$

11.– *Calcular razonadamente los siguientes determinantes:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{vmatrix}.$$

El primero puede desarollarse por Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 5 + 2\cdot 4\cdot 3 + 0\cdot 1\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 4\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 5 = 16.$$

También se podría desarrollar por adjuntos. Es cómodo por la primera fila (porque tiene un elemento nulo):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 0\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 1\cdot(1\cdot 5 - 1\cdot 4) + 3\cdot(2\cdot 4 - 1\cdot 3) = 16.$$

O primero haber hecho "ceros" mediante operaiones fila y/o columna. Restando a la tercera columna la primera por tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4) - (-5)\cdot 4 = 16.$$

12.– *Sabiendo que* $det \begin{pmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{pmatrix} = 5$ *calcular:*

(i) $det \begin{pmatrix} 2-3a & b & 0 \\ 2 & b & 3 \\ 5 & 2b+5 & c+6 \end{pmatrix}$

Aplicamos las propiedades de los determinantes. Comenzamos restando la segunda fila a la primera y el doble de la segunda a la tercera:

$$\begin{vmatrix} -3a & 0 & -3 \\ 2 & b & 3 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & b & 3 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} = 3\cdot 5 = 15.$$

13.– *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$

(i) *Hallar* AA^t.

Hacemos la traspuesta y luego el producto:

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (a^2+b^2+c^2+d^2)Id$$

(ii) *Calcular* $det(AA^t)$ *y* $det(A)$.

$$det(AA^t) = det((a^2+b^2+c^2+d^2)Id) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4 det(Id) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

y por otra parte:

$$det(AA^t) = det(A)det(A^t) = det(A)det(A) = det(A)^2$$

Por tanto:

$$det(A) = \pm\sqrt{det(AA^t)} = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

Para decidir el signo notamos que si $b = c = d = 0$ entonces $A = aId$ y $det(A) = a^4 = (a^2)^2$. Por tanto nos quedamos con la raíz positiva.

$$det(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

(iii) *Determinar el rango de A en función de los valores de* a, b, c, d.

Si $det(A) \neq 0$ el rango es el máximo posible, es decir, 4. Pero:

$$det(A) = 0 \iff (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = 0 \iff a^2+b^2+c^2+d^2 = 0 \iff a = b = c = d = 0.$$

Pero si $a = b = c = d = 0$ entonces $A = 0$ y $rango(A) = 0$. Concluimos que:

$$rango(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } a = b = c = d = 0 \\ 4 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

16.– *Calcular el siguiente determimante:*

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

¿ Para qué valores reales de $x_1, x_2, \dots, x_n$ *se anula?.*

Para hallar el determinante lo transformamos mediante operaciones elementales que conserven su valor. Sumaremos a la primera fila la segunda multiplicada por $-x_1$, la tercera por $-x_2$, la cuarta por $-x_3$ y así sucesivamente. Nos queda:

$$\begin{vmatrix} -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Es una matriz triangular; el determinante es el producto de los términos de la diagonal:

$$-x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2.$$

El determinante se anula cuando:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0.$$

Pero como el cuadrado de un número es siempre no negativo, la única posibilidad para que se anule la suma de cuadrados es que todos los términos sean nulos, es decir:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

17.– *Dado $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:*

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} 2 \text{ si } i > j \\ \\ 1 \text{ si } i \leq j \end{cases}$$

(i) *Escribir la matriz P_4.*

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Hallar el determinante de P_4.*

Lo hallaremos en general en el apartado siguiente.

(iii) *Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$, $traza(P_n)$, $det(P_n^{2020})$.*

La matriz es:

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante restamos el doble de la primera fila a todas las demás:

$$det(P_n) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}$$

En particular para $n = 4$, $det(P_4) = (-1)^{4-1} = -1$.

La traza es la suma de los términos de la diagonal:

$$traza(P_n) = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ veces}} = n.$$

Finalmente por las propiedades del determinante:

$$det(P_n^{2020}) = det(P_n)^{2020} = ((-1)^{n-1})^{2020} = (-1)^{2020(n-1)} = 1.$$

I.– *En el conjunto de las matrices $n \times n$ de elementos reales, demostrar que si $AA^T = \Omega$, entonces $A = \Omega$.*

Llamemos $B = A^T$. Entonces por definición de traspuesta, $b_{ij} = a_{ji}$. Ahora por hipotésis $\Omega = AA^t = AB$. Haciendo el producto vemos que para cualquier i, j con, $1 \leq i, j \leq n$:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}a_{jk}$$

En particular, si $i = j$:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}a_{ik} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}^2$$

Por ser A una matriz con coeficientes reales, los cuadrados a_{ik}^2 son siempre números no negativos. Si su suma es cero, todos ellos han de ser cero, y deducimos que $a_{ik} = 0$ para cualquier i, k con, $1 \leq i, k \leq n$. Por tanto $A = \Omega$.

(Primer parcial, febrero 2000)

II.– *Calcular las potencias n-simas de las siguientes matrices:*

El método (*¡de momento!*) más usual es hacer "a mano" las primeras potencias y luego encontrar una regla general:

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hacemos las primeras potencias:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^3 = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix} = abc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paramos en la tercera potencia. Nos fijamos que $C^3 = abcId$. Ahora es muy fácil multiplicar por C^3. Podemos en general hacer lo siguiente. Dado $n > 0$, sabemos que $n = 3q + r$, donde q es el cociente y $r < 3$ es el resto de dividir n por 3. Por tanto:

$$C^n = C^{3q+r} = (C^3)^q C^r = (abcI)^q C^r = a^q b^q c^q C^r$$

y,

$$C^n = \begin{pmatrix} a^q b^q c^q & 0 & 0 \\ 0 & a^q b^q c^q & 0 \\ 0 & 0 & a^q b^q c^q \end{pmatrix}, \text{ si } n = 3q;$$

$$C^n = \begin{pmatrix} 0 & a^{q+1} b^q c^q & 0 \\ 0 & 0 & a^q + b^{q+1} c^q \\ a^q b^q c^{q+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ si } n = 3q + 1;$$

$$C^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{q+1} b^{q+1} c^q \\ a^q b^{q+1} c^{q+1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{q+1} b^q c^{q+1} & 0 \end{pmatrix}, \text{ si } n = 3q + 2.$$

(d) $D = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$. Hacemos las primeras potencias:

$$D^2 = \begin{pmatrix} a^4+a^2b^2+a^2c^2 & a^3b+ab^3+abc^2 & a^3c+ab^2c+ac^3 \\ a^3b+ab^3+abc^2 & a^2b^2+b^4+b^2c^2 & a^2bc+b^3c+bc^3 \\ a^3c+ab^2c+ac^3 & a^2bc+b^3c+bc^3 & a^2c^2+b^2c^2+c^4 \end{pmatrix} = (a^2+b^2+c^2)D$$

Ahora es fácil seguir haciendo las potencias de D, porque:

$$\begin{aligned} &D^3 = D^2D = (a^2+b^2+c^2)D^2 = (a^2+b^2+c^2)^2D \\ &D^4 = D^3D = (a^2+b^2+c^2)^2D^2 = (a^2+b^2+c^2)^3D \\ &\ldots \end{aligned}$$

En general vemos que;

$$D^n = (a^2+b^2+c^2)^{n-1}D$$

De nuevo hay que comprobarlo por inducción:

- Para $n=1$ es cierto, ya que $D^1 = (a^2+b^2+c^2)^{1-1}D = D$.

- Lo suponemos cierto para $n-1$ y lo probamos para n:

$$\begin{aligned} D^n &= D^{n-1}\cdot D = (a^2+b^2+c^2)^{n-2}D\cdot D = (a^2+b^2+c^2)^{n-2}D^2 = \\ &= (a^2+b^2+c^2)^{n-2}(a^2+b^2+c^2)D = (a^2+b^2+c^2)^{n-1}D. \end{aligned}$$

III.– *Para las siguientes familias de matrices no singulares de $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$, decidir si verifican alguna de las dos condiciones: (a) dada una matriz de la familia, su inversa también pertenece a la familia; (b) dadas dos matrices de la familia, su producto también pertenece a la familia.*

(1) *las matrices simétricas regulares,*

(a) CIERTO. Que sea regular simplemente significa que tiene inversa. Y una matriz simétrica es aquella que coincide con su traspuesta.

Hay que probar que si una matriz es simétrica su inversa es también simétrica.

Basta usar las propiedades de la trasposición: $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ pero por ser A simétrica $A^t = A$, luego $(A^{-1})^t = A^{-1}$ y por tanto la inversa es simétrica.

(b) FALSO. Dadas A, B simétricas, veamos si lo es AB. Tenemos $(AB)^t = B^tA^t$; por ser A, B simétricas deducimos que $(AB)^t = BA$. Teniendo en cuenta que el producto de matrices no es conmutativo, en general $BA \neq AB$ y por tanto AB no tiene porque ser simétrica. Veamos un ejemplo del de dos matrices simétricas cuyo prdoducto NO lo es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) *las matrices regulares que conmutan con una matriz dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$,*

(a) CIERTO. Supongamos que una matriz regular B conmuta con A. Veamos que también conmuta su inversa. Por conmutar A yB se tiene $AB = BA$. Multiplicando ambos términos, por la derecha y por la izquierda por B^{-1} tenemos, $B^{-1}ABB^{-1} = B^{-1}BAB^{-1}$. Y como $BB^{-1} = B^{-1}B = I$ queda, $B^{-1}A = AB^{-1}$.

(b) CIERTO. Supongamos que B y C conmutan con A. Veamos que entonces BC también conmuta con A:

$$(BC)A = B(CA) = B(AC) = (BA)C = A(BC)$$

(3) *las matrices ortogonales.*

Una matriz ortogonal es aquella cuya inversa es igual a su traspuesta.

(a) CIERTO. Sea A ortogonal ($A^t = A^{-1}$). Veamos que A^{-1} es ortogonal:

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$$

Vemos que su traspuesta coincide con su inversa y es ortogonal.

(b) CIERTO. Sean A, B ortogonales. Veamos que AB es ortogonal.

$$(AB)^t = B^t A^t = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$$

Luego vemos que su inversa coincide con su traspuesta.

IV.– *Sea A una matriz columna de orden $n \times 1$ tal que $A^t A = 1$ y $B = Id_n - 2AA^t$. Demostrar que:*

a) *B es simétrica*

Hay que comprobar que $B^t = B$. Pero:

$$B^t = (Id_n - 2AA^t)^t = Id_n^t - 2(AA^t)^t = Id_n - 2(A^t)^t A^t = Id_n - 2AA^t = B.$$

b) $B^{-1} = B^t$

Ahora veamos que $BB^t = Id$. Como $B^t = B$ tenemos:

$$BB^t = BB = (Id_n - 2AA^t)(Id_n - 2AA^t) = Id_n - 4AA^t + 4AA^tAA^t.$$

Ahora usamos que $A^t A = 1$:

$$BB^t = Id_n - 4AA^t + 4A\underbrace{(A^tA)}_{1}A^t = Id_n - 4AA^t + 4AA^t = Id_n.$$

(Primer parcial, enero 2008)

V.– *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $A_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \ si\ i = j \\ i \ si\ i \neq j \end{cases}$$

(i) Escribir explícitamente la matriz A_4.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Calcular $det(A_4)$.*

Según la fórmula que veremos en el apartado siguiente:

$$det(A_4) = 4!(4-1)(-1)^{4-1} = -72.$$

(iii) *Para $n \geq 2$, calcular traza A_n, $det(A_n)$ y $rango(A_n)$.*

Tenemos:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & 0 & n-1 \\ n & n & n & \dots & n & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$traza(A_n) = 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 = 0.$$

Para calcular el determinante comenzamos sacando en cada fila un factor común: 2 en la segunda fila, 3 en la tercera, 4 en la cuarta, etctera...

$$|A_n| = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Continuamos sumando todas las filas a la primera y después sacando factor comúna a $n-1$:

$$|A_n| = n! \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = n!(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Restamos ahora la primera fila a las demás y concluimos:

$$|A_n| = n!(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = n!(n-1)(-1)^{n-1}.$$

Para $n > 1$ vemos que el determinante es no nulo y por tanto $rango(A_n) = n$. Para $n = 1$, $A_1 = (0)$ y su rango es 0.

VI.– *Sea X una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ y elementos reales. Sea k un número par. Probar que si $X^k = -Id$, entonces n es también un número par.*

Si se cumple que $X^k = -Id$, aplicando determinantes obtenemos que

$$det(X^k) = det(-Id).$$

Pero $det(X^k) = det(X)^k$ y $det(-Id) = (-1)^n$. Por tanto:

$$det(X)^k = (-1)^n$$

Como k es par, $det(X)^k$ es positivo; entonces $(-1)^n$ ha de ser positivo y en consecuencia n tiene que ser un número par.

VII.– *Dada la matriz $m \times n$ con $m, n > 1$,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (m-1)n+1 & (m-1)n+2 & \dots & mn-1 & mn \end{pmatrix}$$

expresar a_{ij} en función de i y j, y calcular su rango.

El término a_{ij} es de la forma:

$$a_{ij} = j + (i-1) \cdot n$$

Para hallar el rango hacemos operaciones fila y columna sobre la matriz A.

Le restamos la primera fila a todas las demás:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (m-1)n & (m-1)n & \dots & (m-1)n & (m-1)n \end{pmatrix}$$

Ahora le restamos la primera columna a todas las demás:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (m-1)n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que las filas $3, \dots, m$ son proporcionales a la segunda. Por tanto el rango es a lo sumo 2. Para ver que el rango es exactamente 2 basta mostrar un menor 2×2 de determinante no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n & 0 \end{vmatrix} = -n.$$

VIII.– *Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix}$ y $det(A) = 3$, calcular $det(2C^{-1})$ donde $C = \begin{pmatrix} 2p & -a+u & 3u \\ 2q & -b+v & 3v \\ 2r & -c+w & 3w \end{pmatrix}$.*

En primer lugar se tiene:

$$det(2C^{-1}) = 2^3 det(C^{-1}) = \frac{8}{det(C)}.$$

Ahora, aplicamos las propiedades de los determimantes para expresar el determinante de C en función del determinante de A. Sacamos factor común a 2 en la primera columna y a 3 en la última:

$$det(C) = 2 \cdot 3 \cdot det \begin{pmatrix} p & -a+u & u \\ q & -b+v & v \\ r & -c+w & w \end{pmatrix}$$

Le restamos la tercer columna a la segunda:

$$det(C) = 6 \cdot det \begin{pmatrix} p & -a & u \\ q & -b & v \\ r & -c & w \end{pmatrix}$$

Cambiamos de signo la segunda columna (cambiando de signo del determinante):

$$det(C) = -6 \cdot det \begin{pmatrix} p & a & u \\ q & b & v \\ r & c & w \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las dos primeras columnas (el determinante cambia de signo);

$$det(C) = 6 \cdot det \begin{pmatrix} a & p & u \\ b & q & v \\ c & r & w \end{pmatrix} = 6det(A^t).$$

Finalmente el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta. Por tanto:

$$det(C) = 6det(A^t) = 6det(A) = 6 \cdot 3 = 18.$$

y sustituyendo en la expresión de partida:

$$det(2C^{-1}) = 2^3 det(C^{-1}) = \frac{8}{det(C)} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$

IX.– *Dados $x \in R$, $x \neq 0$ y la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{pmatrix},$$

calcular $det(A^3)$ y $det(A^{-1})$.

Por las propiedades del determinante:

$$det(A^3) = det(A)^3$$
$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

por lo que nuestro problema se reduce a calcular el $det(A)$:

$$det(A) = det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 0 & x & -x & 0 \\ 0 & x & 0 & -x \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & -x & 0 \\ x & 0 & -x \end{pmatrix} =$$

$$= -det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & -2x & -x \\ x & -x & -2x \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} -2x & -x \\ -x & -2x \end{pmatrix} = -(4x^2 - x^2) = -3x^2.$$

y en definitiva:

$$det(A^3) = (-3x^2)^3 = -27x^6, \qquad det(A^{-1}) = -\frac{1}{3x^2}.$$

X.– *Dados $n \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ se considera la matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$:*

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a & a & \dots & a & a \\ a & a+b & a & \dots & a & a \\ a & a & a+b & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b & a \\ a & a & a & \dots & a & a+b \end{pmatrix}$$

(i) *Hallar $det(A)$ en función de a, b, n.*

(ii) *Hallar $rango(A)$ en función de a, b, n.*

Comenzamos haciendo operaciones elementales fila que conservan en rango y el determinante.

Restamos la primera columna a todas las demás:

$$\begin{pmatrix} a+b & -b & -b & \dots & -b & -b \\ a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \dots & b & 0 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \end{pmatrix}$$

Sumamos a la primera fila todas las demás:

$$\begin{pmatrix} na+b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \dots & b & 0 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \end{pmatrix}$$

La matriz es triangular. Por tanto su determinante es el producto de los términos de la diagonal:

$$det(A) = (na+b)b^{n-1}.$$

El rango (dado que está escalonada por columnas) es el número de columna no nulas.

- Si $b = 0$ y $a = 0$, la matriz es la matriz nula. Por tanto $rango(A) = 0$.

- Si $b = 0$ y $a \neq 0$, todas las columnas (de la forma escalonada) excepto la primera son nulas. Por tanto $rango(A) = 1$.

- Si $b \neq 0$, las $n-1$ últimas columnas son no nulas. El rango es al menos $n-1$. La primera columna será nula dependiendo de si $an + b = 0$. Deducimos:

– Si $b \neq 0$ y $a = -b/n$ entonces $rango(A) = n-1$.

– Si $b \neq 0$ y $a \neq -b/n$ entonces $rango(A) = n$.

XI.– *Hallar el siguiente determinante para* $n \geq 2$

$$A_n = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3 & \cdots & x_1+y_n \\ x_2+y_1 & x_2+y_2 & x_2+y_3 & \cdots & x_2+y_n \\ x_3+y_1 & x_3+y_2 & x_3+y_3 & \cdots & x_3+y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n+y_1 & x_n+y_2 & x_n+y_3 & \cdots & x_n+y_n \end{vmatrix}$$

Restamos a las filas $2, 3, \dots, n$ la primera fila. Queda:

$$A_n = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1-x_1 & \cdots & x_1-x_1 \\ x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 & \cdots & x_2-x_1 \\ x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_3-x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n-x_1 & x_n-x_1 & x_n-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \end{vmatrix}$$

Vemos que en cada fila $2, 3, \dots, n$ los términos son iguales. Por las propiedades del determinante, podemos sacarlos fuera:

$$A_n = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1) \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1-x_1 & \cdots & x_1-x_1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Entonces si $n > 2$, hay dos o más filas iguales y por tanto el determinante es 0.

Si $n = 2$ queda:

$$A_2 = (x_2 - x_1)\begin{vmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_1 - y_2)$$

(Primer parcial, febrero 2003)

XII.– *Calcular en función de x el siguiente determinante:*

$$det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & 1 \\ x & x^2 & 1 & 1 \\ x^2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores reales de x se anula?.

Hacemos operaciones elementales para simplificar el determinante. Comenzamos sumando todas las fila a la primera:

$$det\begin{pmatrix} 2+x+x^2 & 2+x+x^2 & 2+x+x^2 & 2+x+x^2 \\ x & x^2 & 1 & 1 \\ x^2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & x^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (2+x+x^2)det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x^2 & 1 & 1 \\ x^2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & x^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (2+x+x^2)det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & x^2-x & 1-x & 1-x \\ x^2 & 1-x^2 & 1-x^2 & x-x^2 \\ 1 & 0 & x-1 & x^2-1 \end{pmatrix} =$$

$$= (2+x+x^2)det\begin{pmatrix} x^2-x & 1-x & 1-x \\ 1-x^2 & 1-x^2 & x-x^2 \\ 0 & x-1 & x^2-1 \end{pmatrix} =$$

$$= (2+x+x^2)(x-1)^3 det\begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ -1-x & -1-x & -x \\ 0 & 1 & x+1 \end{pmatrix} =$$

$$= (2+x+x^2)(x-1)^3 det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1-x-x^2 & -1 & -x \\ x^2+x & -x & x+1 \end{pmatrix} =$$

$$= -(2+x+x^2)(x-1)^3 det\begin{pmatrix} -1-x-x^2 & -1 \\ x^2+x & -x \end{pmatrix} = -(2+x+x^2)(x-1)^3 x(x^2+2x+2)$$

El determimante se anula en las raíces de cada factor:

$$2+x+x^2 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$$x - 1 = 0 \iff x = 1$$

$$x = 0$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{1-2} \notin \mathbb{R}$$

Es decir se anula para $x = 0$ ó $x = 1$.

XIII.– *Para cada número natural n se define una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:*

$$a_{ij} = i^2 + j, \qquad i,j = 1,2,\dots,n$$

(i) *Escribir la matriz A para $n = 4$ y calcular su determinante.*

La matriz para $n = 4$ es:

$$\begin{pmatrix} 1^2+1 & 1^2+2 & 1^2+3 & 1^2+4 \\ 2^2+1 & 2^2+2 & 2^2+3 & 2^2+4 \\ 3^2+1 & 3^2+2 & 3^2+3 & 3^2+4 \\ 4^2+1 & 4^2+2 & 4^2+3 & 4^2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \\ 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

Como veremos y probaremos en el apartado siguiente su determinante es cero.

(ii) *Calcular el rango y el determinante de A para cualquier natural n.*

Para $n = 1$ la matriz es $A = (1^2 + 1) = (2)$, su eterminante es 2 (no nulo) y por tanto el rango el máximo posible 1.

Para $n = 2$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1^2+1 & 1^2+2 \\ 2^2+1 & 2^2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. Su determinante es $2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = -3$ no nulo; por tanto el rango es 2.

Veamos el caso general para $n > 2$. Haremos operaciones elementales fila y columna que conservan el rango y determinante. La matriz en general es:

$$\begin{pmatrix} 1^2+1 & 1^2+2 & 1^2+3 & \dots & 1^2+n-1 & 1^2+n \\ 2^2+1 & 2^2+2 & 2^2+3 & \dots & 2^2+n-1 & 2^2+n \\ 3^2+1 & 3^2+2 & 3^2+3 & \dots & 3^2+n-1 & 3^2+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n-1)^2+1 & (n-1)^2+2 & (n-1)^2+3 & \dots & (n-1)^2+n-1 & (n-1)^2+n \\ n^2+1 & n^2+2 & n^2+3 & \dots & n^2+n-1 & n^2+n \end{pmatrix}$$

Restamos a cada columna la anterior:

$$\begin{pmatrix} 1^2+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2^2+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 3^2+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n-1)^2+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ n^2+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Restamos la segunda columna a la tercera, cuarta y siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1^2+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2^2+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3^2+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n-1)^2+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n^2+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como tiene una columna de ceros el determinante es nulo. Además sólo hay dos columnas no nulas, luego el rango a lo sumo es 2. En particular el menor formado por las dos primeras filas y columnas tiene determinante $2 - 5 = -3 \neq 0$, por tanto el rango es exactamente 2.

Es decir si $n > 2$, $rango(A) = 2$ y $det(A) = 0$.

XIV.– *Sea* $n > 2$ *y* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$*, una matriz inversible. Sea* $adj(A)$ *su matriz adjunta. Probar que:*

(a) $det(adj(A)) = det(A)^{n-1}$.

Sabemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A).$$

De donde:

$$adj(A) = det(A) \cdot A^{-1}.$$

Aplicando determinantes queda:

$$det(adj(A)) = det(det(A) \cdot A^{-1}) = det(A)^n det(A^{-1}) = \frac{det(A)^n}{det(A)} = det(A)^{n-1}.$$

(b) $adj(adj(A)) = det(A)^{n-2} \cdot A$.

Como antes sabemos que:

$$adj(A) = det(A) \cdot A^{-1}.$$

Entonces:

$$adj(adj(A)) = det(adj(A)) \cdot adj(A)^{-1} = det(A)^{n-1} \cdot (det(A) \cdot A^{-1})^{-1} = det(A)^{n-1} \cdot det(A)^{-1} \cdot A = det(A)^{n-2} \cdot A.$$