

- 2.— *Para formar un PIN deben de elegirse cuatro caracteres de un alfabeto de 26. ¿Cuántas claves distintas pueden formarse??*

En cada posición del PIN puede haber cualquiera de las 26 letras disponibles; por tanto las posibilidades son:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4 = 456976.$$

Si lo queremos razonar en la forma usual se trata de contar cuantos grupos ordenados de 4 elementos podemos formar utilizando 26 símbolos que pueden repetirse. Es decir, variaciones con repetición de 26 elementos tomados de 4 en 4.

-
- 6.— *Dos profesores y diez alumnos se colocan en fila para una foto. ¿De cuántas formas pueden ubicarse si los profesores han de ir uno en cada extremo de la fila?*

Primero contamos las formas de ordenar los 10 alumnos en el centro de la fila. Son las formas de permutar 10 elementos: $P_{10} = 10!$. Por cada una de esas opciones hay dos formas de colocar a los profesores en los extremos, dependiendo de quien vaya a la izquierda y quien en la derecha. En total son:

$$2 \cdot 10! = 7257600.$$

¿Y si los profesores pueden ir en cualquier lugar, pero separados al menos por un alumno?.

Descontaremos a las formas totales de permutar las 12 personas (10 alumnos y 2 profesores) los casos en los que los profesores van juntos. Las totales son obviamente: $12!$.

Si van juntos podemos considerarlo como un solo bloque. Entonces permutamos 11 elementos (10 alumnos y 1 bloque de dos profesores). Dentro de ese bloque cada profesor puede ir a izquierda o a derecha. Por tanto los casos en los que los profesores van juntos son: $2 \cdot 11!$. Nos queda:

$$12! - 2 \cdot 11! = 10 \cdot 11! = 399168000.$$

-
- 7.— *Reordenando las letras de la palabra INGENIERO:*

- (i) *¿Cuántas "palabras" distintas pueden formarse de manera que todas las vocales aparezcan antes que las consonantes? (por ejemplo, OEEIIRNGN es válida, pero IEIENOGNRN no).*

Las palabras serán de la forma $VVVVVCCCC$, siendo V vocales y C consonantes.

Las vocales son *IEIEO* y las formas de reordenarlas las permutaciones con repetición $PR_{5;2,2}$ (notamos que la *I* y la *E* aparecen dos veces).

Las consonantes son *NGNR* y las formas de reordenarlas las permutaciones con repetición $PR_{4;2}$ (notamos que la *N* aparece dos veces).

Dado que por cada posible ordenación de las vocales tenemos todas las posibilidades para las consonantes el número final de posibles reordenaciones es:

$$PR_{5;2,2}PR_{4;2} = \frac{5!}{2!2!} \cdot \frac{4!}{2!} = 360.$$

- (ii) ¿Cuántas "palabras" distintas pueden formarse de manera que todas las consonantes estén juntas? (por ejemplo, *IENGROEI* es válida, pero *ONGRIIEEN* no).

Consideramos primero el "bloque" de consonantes como una sola letra *C*. Entonces en principio contamos las formas de reordenar *CIEIEO*. Son las permutaciones con repetición $PR_{6;2,2}$.

Ahora ese "bloque" *C* está formado por las consonantes *NGNR* que a su vez pueden reordenarse de $PR_{4;2}$ formas.

Por tanto el número total de reordenaciones en las condiciones indicadas es:

$$PR_{6;2,2}PR_{4;2} = \frac{6!}{2!2!} \cdot \frac{4!}{2!} = 2160.$$

9.— Con las letras de la palabra *INTERNET*,

- (i) ¿Cuántas palabras de 8 letras pueden formarse?

Tenemos que contar las formas de permutar 8 caracteres de los cuales alguno se repiten; en particular hay dos N, T, E y una I, R. Se trata de permutaciones con repetición de 8 elementos de los cuales 2, 2, 2 se repiten:

$$PR_{8;2,2,2} = \frac{8!}{2!2!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^3} = 5040.$$

- (ii) ¿Cuántas de 7 letras?

Notamos que una palabra de 7 letras se construye retirando la última letra de una de 8; y recíprocamente se recupera la palabra de 8 letras a partir de una de 7 añadiendo al final la única letra que dejamos fuera.

Por tanto hay el mismo número de palabras de 7 letras que de 8: 5040.

¿Y de 6 letras?

Distinguimos varios casos en función de que dos letras dejamos fuera para formar nuestra palabra de 6 letras.

- Eliminamos dos veces la misma letra (N, T ó E). Nos quedan 6 letras de las cuales DOS se repiten DOS veces. Son $PR_{6;2,2}$ palabras. Como había tres posibles pares de descartes, las opciones para este caso son $3 \cdot PR_{6;2,2}$.

- Eliminamos una letra de las repetidas dos veces (N,T ó E) y otra de las simples (I ó R). Nos quedan 6 letras de las cuales DOS se repiten DOS veces. Son $PR_{6;2,2}$ palabras. Como había $3 \cdot 2 = 6$ posibles pares de descartes, las opciones para este caso son $6 \cdot PR_{6;2,2}$.

- Eliminamos dos letras DISTINTAS de las dobles (N,T ó N,E ó T,E). Nos quedan 6 letras de las cuales UNA se repite DOS veces. Son $PR_{6;2}$ palabras. Como había 3 posibles pares de descartes, las opciones para este caso son $3 \cdot PR_{6;2}$.

- Se eliminan las dos letras simples R,I. Nos quedan 6 letras de las cuales TRES se repiten DOS veces. Son $PR_{6;2,2,2}$ palabras.

En total:

$$3 \cdot PR_{6;2,2} + 6 \cdot PR_{6;2,2} + 3 \cdot PR_{6;2} + PR_{6;2,2,2} = 6! \left(\frac{9}{2!2!} + \frac{3}{2!} + \frac{1}{2!2!2!} \right) = 6! \cdot \frac{31}{8} = 2790.$$

10.— *Entre un grupo de 6 hombres y 7 mujeres se quiere elegir una comisión de 5 personas:*

(i) *¿Cuántas comisiones distintas podrían formarse?*

Formar una comisión equivale a elegir un grupo de 5 personas entre un total de $6 + 7 = 13$ posibles. Los componentes de una comisión son distintos, luego no se repiten elementos; además no importa el orden en que sean seleccionados. Se trata entonces de combinaciones sin repetición de 13 elementos tomados de 5 en 5:

$$C_{13,5} = \binom{13}{5} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1287.$$

(ii) *¿Cuántas si en cada comisión tiene que haber al menos 2 hombres y 2 mujeres?*

Si cada comisión ha de tener al menos 2 hombres y 2 mujeres hay dos posibilidades:

- Comisiones con 3 hombres y 2 mujeres. Para contarlas multiplicamos las formas de elegir 3 hombres entre los 6 posibles por las formas de elegir 2 mujeres entre el total de 7:

$$C_{6,3}C_{7,2} = \binom{6}{3} \binom{7}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 420.$$

- Comisiones con 2 hombres y 3 mujeres. Para contarlas multiplicamos las formas de elegir 2 hombres entre los 6 posibles por las formas de elegir 3 mujeres entre el total de 7:

$$C_{6,2}C_{7,3} = \binom{6}{2} \binom{7}{3} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 525.$$

El total de opciones es la suma de ambos conteos:

$$420 + 525 = 945.$$

11.— Consideramos el alfabeto formado por las diez letras $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$.

- (i) ¿Cuántas "palabras" de 3 letras pueden formarse con todas ellas distintas y en orden alfabético?

Para formar una palabra de tres letras distintas en orden alfabético basta seleccionar que tres letras diferentes la formaran (necesariamente habrá una única forma de colocarlas en orden alfabético). Por ejemplo si seleccionamos A, G, C la palabra de tres letras en orden alfabético será ACG . Igualmente si seleccionamos C, A, G la palabra de tres letras en orden alfabético es ACG .

En definitiva hemos de contar cuantos grupos pueden formarse de tres elementos diferentes escogidos entre diez posibles sin importar el orden. Son combinaciones sin repetición de 10 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

- (ii) ¿Cuántas "palabras" de 8 letras que tengan exactamente tres Aes?

Primero contamos en que tres posiciones de las ocho posibles aparecerán las tres Aes. Son formas de elegir tres elementos entre ocho posibles sin importar el orden y sin repetir: $C_{8,3}$.

Después contamos las formas de colocar cinco letras escogidas entre las nueve restantes en los cinco puestos que han quedado libres. Son variaciones con repetición de 9 elementos tomados de 5 en 5. En total:

$$C_{8,3} \cdot VR_{9,5} = \binom{8}{3} \cdot 9^5 = \frac{8!}{(8-3)!3!} \cdot 9^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 9^5 = 3306744$$

¿Cuántas de ellas tienen las tres Aes consecutivas?

Ahora las Aes necesariamente aparecen consecutivas. Pueden ubicarse en seis posiciones distintas:

$AAAXXXXX, XAAAXXXX, XXAAAXXX$
 $XXXAAAXX, XXXXAAAX, XXXXXAAA$

Por cada una de ellas, como antes, contamos las formas de colocar las cinco letras en los puestos libres escogidas entre nueve posibles. En total:

$$6 \cdot VR_{9,5} = 6 \cdot 9^5 = 354294.$$

12.— Se reparten 10 canicas entre tres niñas, Sabela, Lorena y Rita.

- (i) ¿De cuántas formas puede hacerse si las canicas son todas diferentes entre sí?

Supongamos que las diez canicas están numeradas del 1 al 10. Un reparto de las mismas consiste en asignar a cada número uno de los tres posibles nombres de las niñas. Es decir, estamos contando cuantos grupos de 10 elementos podemos formar

con 3 diferentes pudiendo repetirlos e importando el orden. Se trata de variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 10 en 10:

$$VR_{3,10} = 3^{10}.$$

- (ii) *¿De cuántas formas puede hacerse si las canicas son indistinguibles entre si?*

La diferencia con el caso anterior es que ahora, por ser indistinguibles las canicas, da igual que canica toque a cada una; un reparto sólo se diferencia de otro en el número de canicas que toco a cada una. Se trata por tanto de contar cuantos grupos de 10 elementos podemos formar con 3 diferentes, pudiendo repetirlos pero sin importar el orden. Son combinaciones con repetición de 3 elementos tomados de 10 en 10:

$$CR_{3,10} = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66.$$

¿Y si además cada niña recibe al menos dos canicas?

Si cada una recibe dos canicas al menos, quedan por repartir $10 - 2 \cdot 3 = 4$ canicas. Son combinaciones con repetición de 3 elementos tomados de 4 en 4:

$$CR_{3,4} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15.$$

13.— *Si sólo podemos usar los números 1 y 2:*

- (i) *¿Cuántas matrices distintas 2×7 pueden formarse?*

Una matriz 2×7 está formada por $2 \cdot 7 = 14$ números cada uno de los cuáles puede tomar sólo dos valores, 1 o 2. Si los números aparecen en distinta posición las matrices son diferentes. Se trata por tanto de variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 14 en 14:

$$VR_{2;14} = 2^{14} = 16384.$$

¿Cuántas de ellas tienen rango 1?

Una matriz no nula con dos filas tiene rango 1 si las dos filas son proporcionales. Dado que estas filas están formada sólo por unos y doses, esto solo puede ocurrir si las filas son iguales o bien si una fila es toda de unos y la otra el doble: toda formada por doses.

Entonces:

- Las matrices con dos filas iguales, son las formas de distribuir unos y doses en las siete columnas: $VR_{2;7} = 2^7$.

- Además hay dos matrices con una fila el doble de la otra, dependiendo de si la fila de unos es la primera y la de doses es la segunda o viceversa.

En total: $2^7 + 2 = 130$.

- (ii) *Si utilizamos en cada una de ellas exactamente siete 1_s y siete 2_s , ¿cuántas matrices distintas 2×7 pueden formarse?*

Tenemos prefijados cuantos elementos podemos usar de cada uno de los dos tipos existentes; lo que diferencia una matriz de otra es la posición donde se colocan. Por tanto se trata de permutaciones con repetición de 14 elementos de los cuales el uno y el dos se repiten cada uno de ellos siete veces:

$$PR_{14;7,7} = \frac{14!}{7!7!} = 3432.$$

16.— Sea P un polígono regular de n lados.

(i) ¿Cuántas diagonales tiene el polígono?

Las diagonales son segmentos que unen pares de vértices no consecutivos (es decir distintos de los lados). El número de pares distintos de vértices son el número de grupos de dos elementos escogidos entre n posibles, sin repetir y sin importar el orden, es decir:

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Descontamos el número de lados:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

(ii) ¿Cuántos triángulos pueden construirse uniendo vértices de P ?

Un triángulo está determinado por sus tres vértices. Por tanto contamos el número de grupos de tres elementos escogidos entre n posibles, sin repetir y sin importar el orden, es decir:

$$C_{n,3} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

¿Cuántos de ellos están formados sólo por diagonales?

Del total de triángulos calculado antes descontamos los que tienen algún lado. Distinguimos:

- Los que contienen dos lados consecutivos. Si orientamos el polígono en el sentido de las agujas del reloj, el primero de los lados de uno de esos triángulos puede ser uno cualquiera de los n lados del polígono. Por tanto hay n triángulos con dos lados consecutivos.

- Los que sólo contienen un lado. Hay n formas de elegir el lado que contienen. El vértice restante no puede ser ni los que limitan el lado ni los adyacentes (para evitar que el triángulo tenga dos lados consecutivos). Por tanto hay $n-4$ opciones para ese vértice. En total $n(n-4)$.

En definitiva el número de triángulos formados sólo por diagonales es:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n - n(n-4) = \frac{n(n^2 - 9n + 20)}{6} = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}.$$

17.— *Nueve amigos van de viaje llevando para ello dos coches, uno de cuatro plazas y otro de cinco.*

- (i) *¿De cuántas formas pueden distribuirse en los dos coches si todos tienen carnet de conducir?*

Para elegir el conductor del coche de cuatro plazas hay 9 opciones (cualquiera de los amigos); después para sus acompañantes hay que contar las formas de elegir 3 elementos distintos de entre los 8 amigos restantes, sin importar el orden. Son combinaciones sin repetición de 8 elementos tomados de 3 en 3: $C_{8,3} = \binom{8}{3}$.

Finalmente para el conductor del coche de cinco plazas se puede elegir a uno de los 5 amigos restantes, y se completará con las personas que no han sido seleccionadas hasta ahora. En total:

$$9 \cdot \binom{8}{3} \cdot 5 = 9 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 5 = 2520.$$

- (ii) *¿De cuántas formas pueden distribuirse en los dos coches si sólo tres tienen carnet de conducir?*

Ahora para elegir el conductor del coche de cuatro plazas hay 3 opciones y para el conductor del segundo coche cualquiera de los 2 restantes. Después para los pasajeros del coche de 4 plazas, hay que contar las formas de elegir 3 elementos distintos de entre los 7 amigos restantes, sin importar el orden. Son combinaciones sin repetición de 7 elementos tomados de 3 en 3: $C_{7,3} = \binom{7}{3}$.

En total:

$$3 \cdot 2 \cdot \binom{7}{3} = 6 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 210.$$

(Nota: sólo interesa distinguir quienes van en cada coche y cuál es el conductor, pero no en que asientos se sienta cada uno.)

18.— *¿Cuántas matrices distintas 3×3 pueden formarse con exactamente tres 1s, tres 2s y tres 3s?*

Cada matriz 3×3 está formada por 9 elementos, que han de ser precisamente tres 1s, tres 2s y tres 3s. Lo que diferencia una matriz de otra es el orden en que aparecen esos números. Se trata por tanto de permutaciones con repetición de 9 elementos de los cuales 3, 3 y 3 son iguales entre sí.

$$PR_{9,3,3,3} = \frac{9!}{3!3!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1680.$$

¿Cuántas de ellas tienen traza igual a 7?

La traza de la matriz es la suma de los tres términos de la diagonal. Con las cifras que tenemos la única forma de sumar 7 es como $3 + 3 + 1$ ó $3 + 2 + 2$. En cualquiera de los dos casos esos tres números pueden ordenarse de $PR_{3,2,1}$ formas distintas. Y los seis

números restantes pueden ordenarse de $PR_{6;3,2,1}$. Por tanto el número de matrices con traza 7 serán:

$$2 \cdot PR_{3;2,1} \cdot PR_{6;3,2,1} = 2 \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{6!}{3!2!1!} = 360.$$

I.— *Siete personas suben en un ascensor en la planta baja de un edificio de cinco pisos. Cada una de ellas se apea en alguna de las cinco plantas.*

(i) *¿De cuántas formas pueden bajarse si distinguimos quien se baja en cada piso?*

Cada posible forma de bajarse puede representarse por un grupo ordenado de siete números cada uno de ellos elegido del 1 al 5 que indica en que piso se bajó cada uno de los individuos. Por tanto se trata de contar cuantos grupos de 7 elementos pueden formarse elegidos entre 5 posibles, de manera que importa el orden y puede repetirse. Son variaciones con repetición:

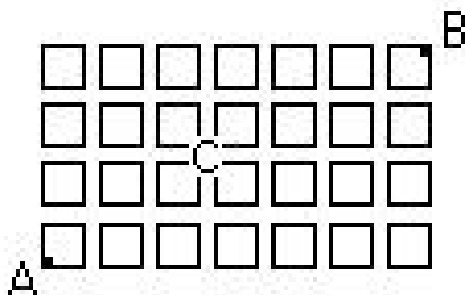
$$VR_{5,7} = 5^7 = 78125.$$

(ii) *¿De cuántas formas pueden bajarse si no distinguimos quien se baja en cada piso, sino únicamente cuántas personas se bajan en cada uno de ellos?*

La diferencia con el caso anterior es que ahora no importa en que orden se escriban los pisos en los que bajan los individuos, ya que no importa la persona que se bajó en cada uno de ellos. Se trata ahora de contar cuantos grupos de 7 elementos pueden formarse elegidos entre 5 posibles, de manera que NO importa el orden y puede repetirse. Son combinaciones con repetición:

$$CR_{5,7} = 5^7 = \binom{5+7-1}{7} = \binom{11}{7} = 330$$

II.— *Vives en una urbanización que se puede representar esquemáticamente con el siguiente diagrama:*



Una mañana te dispones a desplazarte desde A hasta B. Es claro que para hacerlo tendrás que recorrer al menos 11 tramos (un “tramo” es la longitud del lado de una manzana).

(a) *¿Cuantos recorridos formados por 11 tramos llevan desde A hasta B?*

Para hacer el recorrido en once tramos necesariamente en cada cruce sólo puedes, o bien subir, o bien ir a la derecha. Si bajas o vas a la izquierda necesitarías más de 11 tramos para completar el recorrido. En concreto hay que subir 4 manzanas e ir 7 a la derecha.

Por tanto una ruta de once tramos consiste simplemente en decidir en que orden hacemos los tramos de subida y los de ir a la derecha. Son permutaciones con repetición de 11 elementos donde hay 7 de una clase y 4 de la otra:

$$P(11; 7, 4) = \frac{11!}{7!4!} = 330$$

(b) *¿Cuántos de 12 tramos?*

Sabemos que el número mínimo de tramos es 11, 4 hacia arriba y 7 a la derecha. Si recorremos algún tramo a la izquierda o hacia abajo, hemos de volver a recorrer otro hacia la derecha o hacia arriba respectivamente, para recuperarlo. Por tanto para completar el recorrido de A a B , necesariamente hemos de añadir un número par de tramos al número mínimo 11. Deducimos que es imposible hacerlo en 12 tramos.

(c) *Si deseas evitar a toda costa la intersección C marcada en el dibujo (por motivos que no vienen al caso), ¿cuántos recorridos de 11 tramos puedes seguir?*

Contamos el número de recorridos de 11 tramos que pasan por la intersección C y los descontamos del número de recorridos total calculado en (a).

Para ir de A a C necesitamos 3 tramos a la derecha y 2 hacia arriba. Las posibilidades son $P(5; 3, 2)$. Para ir de C a B necesitamos 4 tramos a la derecha y 2 hacia arriba. Es decir, $P(6; 4, 2)$ posibilidades. En total hay

$$P(5; 3, 2) \cdot P(6; 4, 2) = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{6!}{4!2!} = 150$$

recorridos de 11 tramos pasando por C .

Por tanto el número de recorridos de 11 tramos que no pasan por C es:

$$\frac{11!}{7!4!} - \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{6!}{4!2!} = 330 - 150 = 180.$$

IV.— *Sea A un conjunto con n elementos. ¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto A ? Probar que el número de subconjuntos de cardinal par y el número de subconjuntos de cardinal impar coinciden.*

Método I: Dado un subconjunto de A cada elemento puede estar o no en el subconjunto. Es decir hay dos posibilidades para cada elemento de A . Por tanto, en total habrá 2^n posibles subconjuntos.

Veamos ahora que coinciden el número de subconjuntos de cardinal par e impar. Para ello definiremos un criterio que hace corresponder a cada conjunto con un número par

de elementos otro con un número impar, y viceversa. Fijamos un elemento $a_0 \in A$. Dado un subconjunto B de A , construimos un subconjunto B' de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} \{n^o \text{ par de elementos}\} & \longrightarrow & \{n^o \text{ impar de elementos}\} \\ B & \longrightarrow & \begin{array}{l} B \cup \{a_0\} \text{ si } a_0 \notin B \\ B \setminus \{a_0\} \text{ si } a_0 \in B \end{array} \end{array}$$

Es decir, si a_0 no está en B , se lo añadimos ($B' = B \cup \{a_0\}$); si a_0 está en B se lo quitamos ($B' = B \setminus \{a_0\}$). De esta forma establecemos una correspondencia biunívoca entre subconjuntos de A con un número par de elementos y subconjuntos de A con un número impar de elementos. Por tanto hay el mismo número de unos y de otros.

Método II: El número de subconjuntos de k elementos que tiene A corresponde precisamente a las combinaciones sin repetición de n elementos tomado de k en k , $C_{n,k} = \binom{n}{k}$. El número total de subconjuntos será:

$$Total = C_{n,0} + C_{n,1} + \dots + C_{n,n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$

Pero por el binomio de Newton esto es exactamente $(1+1)^n = 2^n$.

Con este mismo razonamiento el número de subconjuntos con un número par de elementos es:

$$Pares = C_{n,0} + C_{n,2} + \dots + C_{n,m} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{m}$$

donde $m = n$ si n es par y $m = n - 1$ si n es impar. El número de subconjuntos con cardinal impar es:

$$Impares = C_{n,1} + C_{n,3} + \dots + C_{n,m'} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{m'}$$

donde $m' = n - 1$ si n es par y $m' = n$ si n es impar. Si ahora calculamos la diferencia entre ambos queda:

$$Pares - Impares = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

Por el binomio de Newton esto es exactamente $(1-1)^n = 0$ y probamos la igualdad entre $Pares$ e $Impares$.

V.— Utilizando sólo unos y ceros, ¿cuántas matrices 3×3 pueden formarse?. ¿Cuántas de ellas tienen traza par?. ¿Cuántas determinante 3?.

Una matriz 3×3 tiene nueve elementos; en cada uno de ellos podemos colocar un cero ó un uno: dos opciones. Por tanto el número de matrices que podemos formar es $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ veces}} = 2^9 = 512$.

O también: para formar una matriz 3×3 tenemos que elegir nueve elementos escogidos entre dos posibles; podemos repetirlos y el orden de los elementos diferencia una matriz de otra: se trata de variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 9 en 9:

$$VR_{2,9} = 2^9 = 512.$$

Una matriz con ceros y unos de traza par o bien tiene tres ceros en la diagonal o bien dos unos y un cero.

Matrices con tres ceros en la diagonal: contamos las formas de elegir los seis elementos restantes que pueden ser ceros o unos. Razonando como antes hay 2^6 posibilidades.

Matrices con dos unos y un cero en la diagonal: en primer lugar el cero puede ir en una de las tres posiciones de la diagonal. Por cada una de esas opciones contamos las formas de elegir los seis elementos restantes fuera de la diagonal: 2^6 . En total entonces: $3 \cdot 2^6$.

Por tanto las matrices con traza par son:

$$2^6 + 3 \cdot 2^6 = 4 \cdot 2^6 = 2^8 = 246.$$

Finalmente, no hay matrices de determinante tres. Observamos la fórmula de Sarrus para el determinante 3×3 es:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Dado que en nuestro caso los términos a_{ij} son cero o uno, se tiene que:

$$\det(A) \leq 1 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 3$$

Es decir a lo sumo el determinante podría valer tres. Pero para ello tendría que ocurrir que:

$$a_{11}a_{22}a_{33} = a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{21}a_{32} = 1$$

Pero entonces todos los elementos de la matriz serían 1 y ésta tendría determinante cero. Concluimos que es imposible que una matriz con ceros y unos tenga determinante 3.

VI.— *En una caja de bombones hay 3 unidades de cada uno de los 5 tipos existentes. Los bombones de cada tipo son indistinguibles entre sí.*

(a) *Se sacan de la caja 3 bombones (a la vez). Determinar el número de configuraciones posibles.*

Se trata de contar los grupos de 3 elementos que pueden formarse escogidos entre 5 tipos diferentes, pudiendo repetir y sin importar el orden. Son combinaciones con repetición de 5 tipos de elementos tomados de 3 en 3:

$$CR_{5,3} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

- (b) *Lo mismo si se sacan 4 bombones.*

En principio es la misma idea que en el apartado anterior; combinaciones con repetición de 5 tipos de elementos tomados de 4 en 4. La única diferencia es que como sólo hay 3 unidades de cada tipo hay que excluir del conteo la posibilidad de los 4 bombones del mismo tipo: cinco opciones (una por cada tipo de bombón). Nos queda:

$$CR_{5,4} - 5 = \binom{5+4-1}{4} - 5 = \binom{8}{4} - 5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 5 = 70 - 5 = 65.$$

VII.— *Diez amigos alquilan un minibús con 12 plazas para los pasajeros, distribuidas en 4 filas de 3 asientos cada una. Uno de los amigos tendrá que conducir, pero sólo tres de ellos tienen el carnet adecuado para hacerlo.*

- (i) *¿De cuántas formas distintas pueden sentarse en el minibús?*

Para escoger al conductor hay 3 opciones, ya que sólo tres de los diez amigos pueden conducir.

Después para los 9 restantes, tenemos que contar las formas de elegir 9 asientos entre los 12 disponibles; importa el orden, porque no es lo mismo que en un asiento se siente una u otra persona y no pueden repetirse, porque no puede haber dos personas en el mismo asiento. Son variaciones sin repetición de 12 elementos tomados de 9 en 9.

En definitiva:

$$3 \cdot V_{12,9} = \frac{3 \cdot 12!}{(12-9)!} = 239500800.$$

- (ii) *¿En cuántas de ellas ninguna de las 4 filas queda totalmente libre?*

A las posibilidades totales, restaremos aquellas en las que alguna de las cuatro filas queda libre. Nos fijamos en que si una fila queda libre, quedan 9 asientos para las 9 personas restantes (omitiendo al conductor). Por tanto por cada fila libre hay 9! formas de permutarlas en esos 9 asientos. La cantidad pedida es entonces:

$$TOTAL - 3 \cdot 4 \cdot 9! = 235146240$$

VIII.— *Con los dígitos del 1 al 9:*

- (i) *¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse?*

Método I: Para la primera cifra tenemos 9 opciones; para la segunda cifra $9 - 1 = 8$ opciones (no podemos repetir la ya usada); para la tercera $9 - 2 = 7$ opciones (no podemos repetir las dos primeras):

$$9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Método II: Se trate de contar cuantos grupos de 3 elementos escogidos entre 9 posibles sin repetirlos y de forma que el orden distingui un grupo de otro; son variaciones sin repetición de 9 elementos tomados de 3 en 3:

$$V_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

(ii) *¿En cuántos de los anteriores la suma de sus cifras es un número par?*

Para que la suma de las cifras sea par, o bien aparecen dos impares y una par o bien las tres pares:

- Números con tres cifras pares. Es un problema equivalente al apartado (i) pero ahora sólo con las cifras 2, 4, 6, 8, es decir, con 4 cifras distintas:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

- Números con una cifra par y dos impares. La cifra par puede aparecer en tres posiciones: PII, IPI, IIP. Para la cifra par hay cuatro opciones: 2, 4, 6, 8. Para las impares, las formas de elegir dos cifras entre cinco (1, 3, 5, 7, 9) sin repetir e importando el orden. En total por tanto:

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 240.$$

En definitiva resultan:

$$24 + 240 = 264.$$

(iii) *¿Cuántos números de cinco cifras distintas pueden formarse de manera que éstas aparezcan en orden decreciente?*

Dado que necesariamente las cifras aparecen en orden decreciente, lo que diferencia un número de otro son las cifras que aparecen y no el orden en que lo hacen. Por tanto se trata de contar el número de grupos de 5 elementos escogidos entre 9 posibles, sin importar el orden y sin repetir. Son combinaciones de 9 elementos tomados de 5 en 5:

$$\binom{9}{5} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126.$$

(1 punto)

IX.— *En una playa se juntan 13 amigos y deciden hacer 4 equipos para jugar al voleibol, tres de 3 jugadores y uno de 4. Entre ellos hay un jugador profesional y otro muy torpe. ¿De cuántas formas pueden armarse los equipos si el "torpe" tiene que ir en el equipo de cuatro y el profesional en un equipo de tres?*

Para elegir a los tres jugadores que acompañaran al torpe en el equipo de 4, tenemos que contar los distintos grupos de 3 elementos escogidos entre 11 posibles (excluimos al jugador profesional y al torpe), sin importar el orden y sin repetir: se trata de combinaciones sin repetición de 11 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{11,3} = \binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Por cada uno de los anteriores posibles equipos de cuatro, para elegir los 2 jugadores que acompañarán al profesional tenemos que contar los distintos grupos de 2 elementos escogidos entre 8 posibles (excluimos los cuatro del equipo anterior y al profesional):

$$C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}$$

Para el tercer equipo seleccionamos 3 jugadores de los 6 restantes:

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Finalmente el cuarto estaría formado por los 3 jugadores que quedan. Ahora dado que es indiferente en que orden se elijan los dos últimos equipos (ojo, no los dos primeros porque tienen cada uno de ellos una estructura especial: contar con el jugador torpe o el profesional) hay que dividir por $2!$.

En definitiva las formas de armar los equipos serían:

$$\frac{C_{11,3} \cdot C_{8,2} \cdot C_{6,3}}{2!} = \frac{165 \cdot 28 \cdot 20}{2} = 46200.$$

X.— *Una frutería vende peras, manzanas, naranjas y plátanos, en bandejas de 6 piezas de frutas, por ejemplo: una bandeja con 6 manzanas; o con 3 naranjas, 2 peras y un plátano.*

(a) *¿Cuántos tipos de bandejas son posibles?*

Para cada bandeja formamos grupos de seis elementos escogidos entre cuatro tipos distintos, pudiendo repetirlos. Se trata de combinaciones con repetición de cuatro elementos tomados de seis en seis:

$$CR_{4,6} = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84.$$

(b) *¿Cuántos con al menos una fruta de cada clase?*

Si al menos hay una fruta de cada clase, sólo tenemos que contar de cuantas formas podemos elegir las dos restantes. Análogamente al apartado anterior, serían:

$$CR_{4,2} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10.$$
