7.– *Reordenando las letras de la palabra INGENIERO:*

(i) *¿Cuántas "palabras" distintas pueden formase de manera que todas las vocales aparezcan antes que las consonantes? (por ejemplo, OEEIIRNGN es válida, pero IEIENOGRN no).*

Las palabras serán de la forma $VVVVVCCCC$, siendo V vocales y C consonantes.

Las vocales son $IEIEO$ y las formas de reordenarlas las permutaciones con repetición $PR_{5;2,2}$ (notamos que la I y la E aparecen dos veces).

Las consonantes son $NGNR$ y las formas de reordenarlas las permutaciones con repetición $PR_{4;2}$ (notamos que la N aparece dos veces).

Dado que por cada posible ordenación de las vocales tenemos todas las posibilidades para las consonantes el número final de posibles reordenaciones es:

$$PR_{5;2,2}PR_{4;2} = \frac{5!}{2!2!} \cdot \frac{4!}{2!} = 360.$$

(ii) *¿Cúantas "palabras" distintas pueden formase de manera que todas las consonantes estén juntas? (por ejemplo, IENGNROEI es válida, pero ONGRIIEEN no).*

Consideramos primero el "bloque" de consonantes como una sola letra C. Entonces en principio contamos las fomras de reordenar $CIEIEO$. Son las permutaciones con repetición $PR_{6;2,2}$.

Ahora ese "bloque" C está formado por las consonantes $NGNR$ que a su vez pueden reordenarse de $PR_{4;2}$ formas.

Por tanto el número total de reordenaciones en las condiciones indicadas es:

$$PR_{6;2,2}PR_{4;2} = \frac{6!}{2!2!} \cdot \frac{4!}{2!} = 2160.$$

9.–

(i) Reordenando las letras de la palabra PARALELOS, ¿cuantas "palabras" pueden formarse alternando vocales y consonantes?.

Dado que la palabra tiene cinco consonantes y cutro vocales, para ir alternando unas u otras necesariamente hemos de empezar en una consonantes:

$$cvcvcvcvc, \qquad c = consonante, \quad v = vocal.$$

Por cada posible colocación de las consonantes, tenemos que contar las posiblidades para colocar las vocales. Es decir el número pedido es el producto de las formas de reordenar las consontantes por las formas de reordenar las vocales.

Las formas de reordenar las consonantes son permutaciones con repetición de 5 elementos de los cuales dos son iguales entres si (las dos eLes):

$$PR_{5;2} = \frac{5!}{2!}.$$

Las formar de reordenar las vocales son son permutaciones con repetición de 4 elementos de los cuales dos son iguales entres si (las dos Aes):

$$PR_{4;2} = \frac{4!}{2!}.$$

En definitiva el número pedido es:

$$PR_{5;2}PR_{4;2} = \frac{5!4!}{2!2!} = 720.$$

(ii) *¿Y con las letras de CANONICA?*

Es análogo al anterior. La única diferencia es que al haber el mismo número de vocales y consonantes, pueden colocarse alternativamente empezando por vocal o por consonante:

$$cvcvcvcv, \quad o, \quad vcvcvcvc, \qquad\qquad c = consonante, \quad v = vocal.$$

Queda por tanto:

$$2 \cdot PR_{4;2,2} \cdot PR_{4;2} = 2 \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{4!}{2!} = 144.$$

10.– *Entre un grupo de* 6 *hombres y* 7 *mujeres se quiere elegir una comisión de* 5 *personas:*

(i) *¿Cuántas comisiones distintas podrían formarse?.*

Formar una comisión equivale a elegir un grupo de 5 personas entre un total de $6 + 7 = 13$ posibles. Los componentes de una comisión son distintos, luego no se repiten elementos; además no importa el orden en que sean seleccionados. Se trata entonces de combinaciones sin repetición de 13 elementos tomados de 5 en 5:

$$C_{13,5} = \binom{13}{5} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1287.$$

(ii) *¿Cuántas si en cada comisión tiene que haber al menos* 2 *hombres y* 2 *mujeres?.*

Si cada comisión ha de tener al menos 2 hombres y 2 mujeres hay dos posibilidades:

- Comisiones con 3 hombres y 2 mujeres. Para contarlas multiplicamos las formas de elegir 3 hombres entre los 6 posibles por las formas de elegir 2 mujeres entre el total de 7:

$$C_{6,3}C_{7,2} = \binom{6}{3}\binom{7}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 420.$$

- Comisiones con 2 hombres y 3 mujeres. Para contarlas multiplicamos las formas de elegir 2 hombres entre los 6 posibles por las formas de elegir 3 mujeres entre el total de 7:

$$C_{6,2}C_{7,3} = \binom{6}{2}\binom{7}{3} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 525.$$

El total de opciones es la suma de ambos conteos:

$$420 + 525 = 945.$$

11.– *Consideramos el alfabeto formado por las diez letras A,B,C,D,E,F,G,H,I,J.*

(i) *¿Cuántas "palabras" de* 3 *letras pueden formarse con todas ellas distintas y en orden alfabético?.*

Para formar una palabra de tres letras distintas en orden alfabético basta seleccionar que tres letras diferentes la formaran (necesariamente habrá una única forma de colocarlas en orden alfabético). Por ejemplo si seleccionamos A,G,C la palabra de tres letras en orden alfabético serás ACG. Igualmente si seleccionamos C,A,G la palabara de tres letras en orden alfabético es ACG.

En definitiva hemos de contar cuantos grupos puden formarse de tres elementos diferentes escogidos entre diez posibles sin importar el orden. Son combinaciones sin repetición de 10 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

(ii) *¿Cuántas "palabras" de* 8 *letras que tengan exactamente tres Aes.?*

Primero contamos en que tres posiciones de las ocho posible aparecerán las tres Aes. Son formas de elegir tres elementos entre ocho posibles sin importar el orden y sin repetir: $C_{8,3}$.

Después contamos las formas de colocar cinco letras escogidas entre las nueve restantes en los cinco puestos que han quedado libres. Son variaciones con repetición de 9 elementos tomados de 5 en 5. En total:

$$C_{8,3} \cdot VR_{9,5} = \binom{8}{3} \cdot 9^5 = \frac{8!}{(8-3)!3!} \cdot 9^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 9^5 = 3306744$$

¿Cuántas de ellas tienen las tres Aes consecutivas?.

Ahora las Aes necesariamente aparecen consecuitvas. Pueden ubicarse en seis posiciones distintas:

$$AAAXXXXX, XAAAXXXX, XXAAAXXX$$
$$XXXAAAXX, XXXXAAAX, XXXXXAAA$$

Por cada una de ellas, como antes, contamos las formas de colocar las cinco letras en los puestos libres escogidas entre nueve posibles. En total:

$$6 \cdot VR_{9,5} = 6 \cdot 9^5 = 354294.$$

13.– *Si sólo podemos usar los números* 1 *y* 2*:*

(i) *¿Cuántas matrices distintas* 2×7 *pueden formarse?.*

Una matriz 2×7 está formada por $2\cdot 7=14$ números cada uno de los cuáles puede tomar sólo dos valores, 1 o 2. Si los números aparecen en distinta posición las matrices son diferentes. Se trata por tanto de variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 14 en 14:

$$VR_{2;14}=2^{14}=16384.$$

¿Cuántas de ellas tienen rango 1*?.*

Una matriz no nula con dos filas tiene rango 1 si las dos filas son proporcionales. Dado que estas filas están formada sólo por unos y doses, esto solo puede ocurrir si las filas son iguales o bien si una fila es toda de unos y la otra el doble: toda formada por doses.

Entonces:

- Las matrices con dos filas iguales, son las formas de distribuir unos y doses en las siete columnas: $VR_{2;7}=2^7$.

- Además hay dos matrices con una fila el doble de la otra, dependiendo de si la fila de unos es la primera y la de doses es la segunda o viceversa.

En total: $2^7+2=130$.

(ii) *Si utilizamos en cada una de ellas exactamente siete* 1_s *y siete* 2_s*, ¿cuántas matrices distintas* 2×7 *pueden formarse?.*

Tenemos prefijados cuantos elementos podemos usar de cada uno de los dos tipos existentes; lo que diferencia una matriz de otra es la posición donde se colocan. Por tanto se trata de permutaciones con repetición de 14 elementos de los cuales el uno y el dos se repiten cada uno de ellos siete veces:

$$PR_{14;7,7}=\frac{14!}{7!7!}=3432.$$

14.–

(i) *¿Cuántos números capicúas de* 9 *cifras hay?. ¿En cuántos de ellos cada cifra no se repite más de dos veces?.*

Un número capicúa es aquel que se escribe igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Si tiene nueve cifras, sigue la estructura:

$$ABCDEDCBA$$

La cifra A no puede ser cero porque un número no comienza por cero. Por tanto para la cifra A hay 9 opciones. Para cada una de las cifras B,C,D,E hay 10 posibilidades. En total:

$$9\cdot 10^4=90000.$$

Ahora si cada cifra no puede repetirse más de dos veces necesariamente A, B, C, D, E deben de ser diferentes. Entonces, para la cifra A como antes hay 9 opciones (el cero queda excluído); para la B no podemos repetir la A, pero introducimos el cero: 9 opciones. Para la C cualquiera menos las dos ya usadas en A, B: $10-2=8$ opciones; para la D cualquiera menos las tres anteriores: $10-3=7$ opciones; y por lo mismo 6 para la última. En total:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216.$$

(ii) *¿Cuántos números capicúas de* 21 *cifras pueden formarse usando para cada uno de ellos exactamente* 11 *unos y* 10 *doses?.*

Un número capicúa de 21 cifra tiene las 10 últimas cifras iguales a las 10 primeras (en orden inverso) y además una cifra central. Por tanto si usamos 10 doses, no puede haber un dos en la posición central, ya que nos quedarían $10-1=9$ para repatrir a partes iguales a izquierda y derecha del centro; pero no es posible porque 9 no es par.

Entonces necesariamente en la posición central hay un uno. Después contamos las formas de colocar 5 unos y 5 doses en las 10 primeras posiciones (de forma que en las 10 últimas se copian éstas en orden inverso). Son permutaciones con repetición de 10 elementos de los cuales 5 y 5 son iguales entre si:

$$PR_{10;5,5} = \frac{10!}{5!5!} = 252.$$

15.– *Al volver a montar un dispositivo electrónico nos encontramos con cinco cables que pueden ser conectados, cualquiera de ellos, en cinco puntos distintos, pero no recordamos como era su configuración inicial.*

(i) *Si sabemos que en cada punto de conexión va un sólo cable. ¿Cuántas pruebas habría que hacer como máximo hasta dar con la configuración inicial?.*

Se trata de contar las formas de ordenanar los cinco cables en cinco posiciones. Son por tanto permutaciones sin repetición de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

(ii) *Si lo que recordamos es que exactamente uno de los cinco puntos de conexión queda sin cable, pero no sabemos cuál, ¿cuántas pruebas habría que hacer ahora como máximo?.*

Si uno de lo zócalos queda sin cable, los cinco cables se ubicaran sobre las cuatro restantes de manera que dos cables irán conectados a un mismo punto.

Hay 5 posiblidades para elegir el zócalo que queda libre.

Hay 4 posbilidades para elegir el zócalo donde irán dos cables.

Las formas de elegir que dos cables irán en el punto doble de conexión son las formas de elegir dos elementos distintos entre 5 sin importar el orden, es decir combinaciones sin repetición de 5 elementos tomados de 2 en 2: $C_{5,2} = \binom{5}{2}$.

Por últimos los tres cables restantes se ordenan en los tres puntos de conexión restantes: permutaciones de tres elementos, $P_3 = 3!$.

En total:

$$5 \cdot 4 \cdot \binom{5}{2} \cdot 3! = 20 \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1200$$

.

(1 punto)

16.– *Sea P un polígono regular de n lados.*

(i) *¿Cuántas diagonales tiene el polígono?.*

Las diagonales son segmentos que unen pares de vértices no consecutivos (es decir distintos de los lados). El número de pares distintos de vértices son el número de grupos de dos elementos escogidos entre n posibles, sin repetir y sin importar el orden, es decir:

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Descontamos el número de lados:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

(ii) *¿Cuántos triángulos pueden construirse uniendo vértices de P?.*

Un triángulo está determinado por sus tres vértices. Por tanto contamos el número de grupos de tres elementos escogidos entre n posibles, sin repetir y sin importar el orden, es decir:

$$C_{n,3} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

¿Cuántos de ellos están formados sólo por diagonales?.

Del total de triángulos calculado antres descontamos los que tienen algún lado. Distinguimos:

- Los que contienen dos lados consecutivos. Si orientamos el polígono en el sentido de las agujas del reloj, el primero de los lados de uno de esos triángulos puede ser uno cualquiera de los n lados del polígono. Por tanto hay n triángulos con dos lados consecutivos.

- Los que sólo contienen un lado. Hay n formas de elegir el lado que contienen. El vértice restante no puede ser ni los que limitan el lado ni los adyacentes (para evitar que el triángulo tenga dos lados consecutivos). Por tanto hay $n-4$ opciones para ese vértice. En total $n(n-4)$.

En definitiva el número de triángulos formados sólo por diagonales es:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n - n(n-4) = \frac{n(n^2-9n+20)}{6} = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}.$$

17.– *Tenemos 11 amigos.*

(i) ¿De cuántas maneras podemos elegir a cinco de ellos para invitarlos a comer?.

Se trata de contar el número de grupos de 5 elementos distintos (no repetidos) escogidos entre 11 posibles, sin importar el orden de elección. Son por tanto combinaciones sin repetición de 11 elementos tomados de 5 en 5.

$$C_{11,5} = \binom{11}{5} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462.$$

(ii) *Si dos son pareja y siempre han de ir juntos, ¿de cuántas maneras podemos ahora invitar a cinco?*

Contamos por separado los casos en los que la pareja no es invitada y los casos en los que si es invitada. Los primeros son las formas de escoger 5 elementos entre un total de 9 (excluimos de los 11 a los dos miembros de la pareja). Son de nuevo combinaciones sin repetición $C_{9,5}$. En los segundos, una vez incluida la pareja tenemos que escoger otros 3 comensales entre los 9 amigos restantes: $C_{9,3}$. En total:

$$C_{9,5} + C_{9,3} = \binom{9}{5} + \binom{9}{3} = \binom{9}{4} + \binom{9}{3} = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

(iii) *Y si dos están peleados y no los podemos invitar juntos, ¿de cuántas maneras podemos invitar a cinco?*

Contamos por separado los casos en los que no invitamos a ninguno de los dos o sólo a uno de ellos. Los primeros como antes son las formas de escoger 5 elementos entre un total de 9, $C_{9,5}$. Los segundos para cada uno de ellos, las formas de elegir a 4 entre los 9 restantes. En total:

$$C_{9,5} + 2C_{9,4} = \binom{9}{5} + 2\binom{9}{4} = 3\binom{9}{4} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 378.$$

I.– *Siete personas suben en un ascensor en la planta baja de un edificio de cinco pisos. Cada una de ellas se apea en alguna de las cinco plantas.*

(i) *¿De cuántas formas pueden bajarse si distinguimos quien se baja en cada piso?.*

Cada posiblle forma de bajarse puede representarse por un grupo ordenado de siete números cada uno de ellos elegido del 1 al 5 que indica en que piso se bajó cada uno de los individuos. Por tanto se trata de contar cuantros grupos de 7 elementos pueden formarse elegidos entre 5 posibles, de manera que importa el orden y puede repetirse. Son variaciones con repetición:

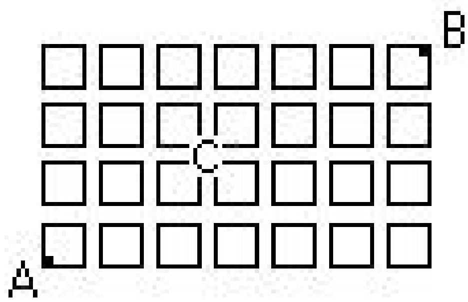
$$VR_{5,7} = 5^7 = 78125.$$

(ii) *¿De cuántas formas pueden bajarse si no distinguimos quien se baja en cada piso, sino únicamente cuántas personas se bajan en cada uno de ellos?.*

La diferencia con el caso anterior es que ahora no importa en que orden se escriban los pisos en los que bajan los individuos, ya que no importa la persona que se bajó en cada uno de ellos. Se trata ahora de contar cuantros grupos de 7 elementos pueden formarse elegidos entre 5 posibles, de manera que NO importa el orden y puede repetirse. Son combinaciones con repetición:

$$CR_{5,7} = 5^7 = \binom{5+7-1}{7} = \binom{11}{7} = 330$$

II.– *Vives en una urbanización que se puede representar esquemáticamente con el siguiente diagrama:*



Una mañana te dispones a desplazarte desde A hasta B. Es claro que para hacerlo tendrás que recorrer al menos 11 tramos (un "tramo" es la longitud del lado de una manzana).

(b) *¿Cuántos de 12 tramos?*

Sabemos que el número mínimo de tramos es 11, 4 hacia arriba y 7 a la derecha. Si recorremos algún tramo a la izquieda o hacia abajo, hemos de volver a recorrer otro hacia la derecha o hacia arriba respectivamente, para recuperalo. Por tanto para completar el recorrido de A a B, necesariamente hemos de añadir un número par de tramos al número mínimo 11. Deducimos que es imposible hacerlo en 12 tramos.

(c) *Si deseas evitar a toda costa la intersección C marcada en el dibujo (por motivos que no vienen al caso), ¿cuántos recorridos de 11 tramos puedes seguir?*

Contamos el número de recorridos de 11 tramos que pasan por la intersección C y los descontamos del número de recorridos total calculado en (a).

Para ir de A a C necesitamos 3 tramos a la derecha y 2 hacia arriba. Las posibilidades son $P(5;3,2)$. Para ir de C a B necesitamos 4 tramos a la derecha y 2 hacia arriba. Es decir, $P(6;4,2)$ posiblidades. En total hay

$$P(5;3,2) \cdot P(6;4,2) = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{6!}{4!2!} = 150$$

recorridos de 11 tramos pasando por C.

Por tanto el número de recorridos de 11 tramos que no pasan por C es:

$$\frac{11!}{7!4!} - \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{6!}{4!2!} = 330 - 150 = 180.$$

IV.– *Sea A un conjunto con n elementos. ¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto A?. Probar que el número de subconjuntos de cardinal par y el número de subconjuntos de cardinal impar coinciden.*

Método I: Dado un subconjunto de A cada elemento puede estar o no en el subconjunto. Es decir hay dos posibilidades para cada elemento de A. Por tanto, en total habrá 2^n posibles subconjuntos.

Veamos ahora que coinciden el número de subconjuntos de cardinal par e impar. Para ello definiremos un criterio que hace corresponder a cada conjunto con un número par de elementos otro con un número impar, y viceversa. Fijamos un elemento $a_0 \in A$. Dado un subconjunto B de A, construimos un subconjunto B' de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} \{n^o \text{ par de elementos}\} & \longrightarrow & \{n^o \text{ impar de elementos}\} \\ B & \longrightarrow & \begin{array}{c} B \cup \{a_0\} \text{ si } a_0 \notin B \\ B \setminus \{a_0\} \text{ si } a_0 \in B \end{array} \end{array}$$

Es decir, si a_0 no está en B, se lo añadimos ($B' = B \cup \{a_0\}$); si a_0 está en B se lo quitamos ($B' = B \setminus \{a_0\}$). De esta forma establecemos una correspondencia biunívoca entre subconjuntos de A con un número par de elementos y subconjuntos de A con un número impar de elementos. Por tanto hay el mismo número de unos y de otros.

Método II: El número de subconjuntos de k elementos que tiene A corresponde precisamente a las combinaciones sin repetición de n elementos tomado de k en k, $C_{n,k} = \binom{n}{k}$. El número total de subconjuntos será:

$$Total = C_{n,0} + C_{n,1} + \ldots + C_{n,n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Pero por el binomio de Newton esto es exactamente $(1+1)^n = 2^n$.

Con este mismo razonamiento el número de subconjuntos con un número par de elementos es:

$$Pares = C_{n,0} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,m} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{m}$$

donde $m = n$ si n es par y $m = n-1$ si n es impar. El número de subconjuntos con cardinal impar es:

$$Impares = C_{n,1} + C_{n,3} + \ldots + C_{n,m'} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{m'}$$

donde $m' = n-1$ si n es par y $m' = n$ si n es impar. Si ahora calculamos la diferencia entre ambos queda:

$$Pares - Impares = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

Por el binomio de Newton esto es exactamente $(1-1)^n = 0$ y probamos la igualdad entre $Pares$ e $Impares$.

V.– *Utilizando sólo unos y ceros, ¿cuántas matrices* 3×3 *pueden formarse?. ¿Cuántas de ellas tienen traza par?. ¿Cuántas determinante* 3*?.*

Una matriz 3×3 tiene nueve elementos; en cada uno de ellos podemos colocar un cero ó un uno: dos opciones. Por tanto el número de matrices que podemos formar es $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n \quad veces} = 2^9 = 512$.

O también: para forma una matriz 3×3 tenemos que elegir nueve elementos escogidos entre dos posibles; podemos repetirlos y el orden de los elementos diferencia una matriz de otra: se trata de variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 9 en 9:

$$VR_{2,9} = 2^9 = 512.$$

Una matriz con ceros y unos de traza par o bien tiene tres ceros en la diagonal o bien dos unos y un cero.

Matrices con tres ceros en la diagonal: contamos las formas de elegir los seis elementos restantes que pueden ser ceros o unos. Razonando como antes hay 2^6 posibilidades.

Matrices con dos unos y un cero en la diagonal: en primer lugar el cero puede ir en una de las tres posiciones de la diagonal. Por cada una de esas opciones contamos las formas de elegir los seis elementos restantes fuera de la diagonal: 2^6. En total entonces: $3 \cdot 2^6$.

Por tanto las matrices con traza par son:

$$2^6 + 3 \cdot 2^6 = 4 \cdot 2^6 = 2^8 = 246.$$

Finalmente, no hay matrices de determinante tres. Observamos la fórmula de Sarrus para el determinante 3×3 es:

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Dado que en nuestro caso los términos a_{ij} son cero o uno, se tiene que:

$$det(A) \leq 1 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 3$$

Es decir a lo sumo el determinante podría valer tres. Pero para ello tendría que ocurrir que:

$$a_{11}a_{22}a_{33} = a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{21}a_{32} = 1$$

Pero entonces todos los elementos de la matriz serían 1 y ésta tendría determinante cero. Concluimos que es imposible que una matriz con ceros y unos tenga determinante 3.

VI.– *En una caja de bombones hay 3 unidades de cada uno de los 5 tipos existentes. Los bombones de cada tipo son indistinguibles entre sí.*

(a) *Se sacan de la caja 3 bombones (a la vez). Determinar el número de configuraciones posibles.*

Se trata de contar los grupos de 3 elementos que pueden formarse escogidos entre 5 tipos diferentes, pudiendo repetir y sin importar el orden. Son combinaciones con repetición de 5 tipos de elementos tomados de 3 en 3:

$$CR_{5,3} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

(b) *Lo mismo si se sacan 4 bombones.*

En principio es la misma idea que en el apartado anterior; combinaciones con repetición de 5 tipos de elementos tomados de 4 en 4. La única diferencia es que como sólo hay 3 unidades de cada tipo hay que excluir del conteo la posiblidad de los 4 bombones del mismo tipo: cinco opciones (una por cada tipo de bombón). Nos queda:

$$CR_{5,4} - 5 = \binom{5+4-1}{4} - 5 = \binom{8}{4} - 5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 5 = 70 - 5 = 65.$$

VII.– *Se quiere formar una comisión de* 12 *personas elegidas entre* 10 *hombres y* 8 *mujeres. ¿De cuántas formas puede hacerse si*

(i) *no hay ninguna restricción?.*

En total tenemos un grupo de 18 personas de los cuáles queremos seleccionar 12. Se trata de contar por tantos cuántos grupos de 12 elementos pueden formarse con 18 elementos distintos sin poder repetirlos y sin importar el orden. Son combinaciones de 18 elementos tomados de 12 en 12:

$$C_{18,12} = \binom{18}{12} = \binom{18}{6} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 18564.$$

(iii) *debe de haber el mismo número de hombres y mujeres?.*

Contamos las formas de elegir 6 hombres del total de 10. Razonando como antes hay $C_{10,6}$ formas de hacerlo. Por cada una de ellas tenemos que elegir 6 mujeres de entre las 8: $C_{8,6}$. En total el producto de ambas combinaciones:

$$C_{10,6}C_{8,6} = \binom{10}{6}\binom{8}{6} = \binom{10}{4}\binom{8}{2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 5880.$$

(iii) *debe de haber más hombres que mujeres?.*

Las posibilidades son $7, 8, 9, 10$ hombres y respectivamente $5, 4, 3, 2$ mujeres. Según razonamos en el apartado anterior el número de comités con h hombres y m mujeres es:

$$C_{10,h}C_{8,m}.$$

Por tanto el total de comités con más hombres que mujeres es:

$$C_{10,7}C_{8,5} + C_{10,8}C_{8,4} + C_{10,9}C_{8,3} + C_{10,10}C_{8,2} = 10458.$$

VIII.– *Con los dígitos del 1 al 9:*

(i) *¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse?.*

Método I: Para la primera cifra tenermos 9 opciones; para la segunda cifra $9 - 1 = 8$ opciones (no podemos repetir la ya usada); para la tercera $9 - 2 = 7$ opciones (no podemos repetir las dos primeras):

$$9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Método II: Se trate de contar cuantos grupos de 3 elementos escogidos entre 9 posibles sin repetirlos y de forma que el orden distingui un grupo de otro; son variaciones sin repetición de 9 elementos tomados de 3 en 3:

$$V_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

(ii) *¿En cuántos de los anteriores la suma de sus cifras es un número par?.*

Para que la suma de las cifras sea par, o bien aparecen dos impares y una par o bien las tres pares:

- Números con tres cifras pares. Es un problema equivalente al apartado (i) pero ahora sólo con las cifras $2, 4, 6, 8$, es decir, con 4 cifras distintas:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

- Números con una cifra par y dos impares. La cifra par puede aparecer en tres posiciones: PII,IPI,IIP. Para la cifra par hay cuatro opciones: 2,4,6,8. Para las impares, las formas de elegir dos cifras entre cinco (1,3,5,7,9) sin repetir e importando el orden. En total por tanto:

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 240.$$

En defnitiva resultan:

$$24 + 240 = 264.$$

(iii) *¿Cuántos números de cinco cifras distintas pueden formare de manera que éstas aparezcan en orden decreciente?.*

Dado que necesariamente las cifras aparecen en orden decreciente, lo que diferencia un número de otro son las cifras que aparecen y no el orden en que lo hacen. Por tanto se trata de contar el número de grupos de 5 elementos escogidos entre 9 posibles, sin importar el orden y sin repetir. Son combinaciones de 9 elementos tomados de 5 en 5:

$$\binom{9}{5} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126.$$

(1 punto)

IX.– *En una playa se juntan* 13 *amigos y deciden hacer* 4 *equipos para jugar al voleibol, tres de* 3 *jugadores y uno de* 4. *Entre ellos hay un jugador profesional y otro muy torpe. ¿De cuántas forman pueden armarse los equipos si el "torpe" tiene que ir en el equipo de cuatro y el profesional en un equipo de tres?.*

Para elegir a los tres jugadores que acompañaran al torpe en el equipo de 4, tenemos que contar los distintos grupos de 3 elementos escogidos entre 11 posibles (excluimos el jugador profesional y el torpe), sin importar el orden y sin repetir: se trata de combinaciones sin repetición de 11 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{11,3} = \binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Por cada uno de los anteriores posibles equipos de cuatro, para elegir los 2 jugadores que acompañarán al profesional tenemos que contar los distintos grupos de 2 elementos escogidos entre 8 posibles (excluimos los cuatro del equipo anterior y al profesional):

$$C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}$$

Para el tercer equipo seleccionamos 3 jugadores de los 6 restantes:

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Finalmente el cuarto estaría formado por los 3 jugadores que quedan. Ahora dado que es indiferente en que orden se elijan los dos últimos equipos (ojo, no los dos primeros porque tienen cada uno de ellos una estructura especial: contar con el jugador torpe o el profesional) hay que dividir por 2!.

En definitiva las formas de armar los equipos serían:

$$\frac{C_{11,3} \cdot C_{8,2} \cdot C_{6,3}}{2!} = \frac{165 \cdot 28 \cdot 20}{2} = 46200.$$

X.– *Una frutería vende peras, manzanas, naranjas y plátanos, en bandejas de 6 piezas de frutas, por ejemplo: una bandeja con 6 manzanas; o con 3 naranjas, 2 peras y un plátano.*

(a) *¿Cuántos tipos de bandejas son posibles?.*

Para cada bandeja formamos grupos de seis elementos escogidos entre cuatro tipos distintos, pudiendo repetirlos. Se trata de combinaciones con repetición de cuatro elementos tomados de seis en seis:

$$CR_{4,6} = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84.$$

(b) *¿Cuántos con al menos una fruta de cada clase?.*

Si al menos hay una fruta de cada clase, sólo tenemos que contar de cuantas formas podemos elegir las dos restantes. Análogamente al apartado anterior, serían:

$$CR_{4,2} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10.$$
