ÁLGEBRA LINEAL I — Algunas soluciones a la Práctica 2

Combinatoria (Curso 2019–2020)

1.– *¿De cuántas formas pueden colocarse en fila las* 16 *piezas blancas de un ajedrez?.*

Las 16 fichas son: ocho peones, dos torres, dos caballos, dos alfiles, un rey y una reina. Se trata por tanto de contar las formas de reordenar 16 elementos de los cuales $8, 2, 2, 2$ son iguales entre si. Son permutaciones con repetición:

$$PR_{16;8,2,2,2} = \frac{16!}{8!2!2!2!} = 64864800.$$

3.– *En una clase de* 20 *alumnos se escogen a* 5 *para formar un comité. ¿De cuántas formas puede hacerse?.*

Se trata de contar los grupos de 5 elementos que pueden formarse escogidos entre 20 sin repetirlos y sin importar el orden: combinacioens sin repetición de 20 elementos tomados de 5 en 5:

$$C_{20,5} = \binom{20}{5} = \frac{20!}{15!5!} = 15504.$$

4.– *Se reparten* 8 *caramelos entre Ana, Marcos y Fernando. ¿De cuántas formas distintas puede hacerse?.*

Cada asignación la codificamos con un código de 8 letras elegidas entre A, M, F repetidas tantas veces como el número de caramelos ha elegido cada uno. Se trata por tanto de combianciones con repetición de 3 elementos tomados de 8 en 8:

$$CR_{3,8} = \binom{3+8-1}{8} = \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$$

5.– *¿Cuántos números de cinco cifras tienen todas ellas diferentes?.*

La primera cifra puede ser cualquiera menos el 0: nueve posibilidades. La segunda cualquiera menos la anterior: nueve posibilidades. La tercera cualquiera menos las dos primeras: ocho posibiliades. Reiterando el argumento queda:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216.$$

9.–

(i) *Reordenando las letras de la palabra PARALELOS, ¿cuantas "palabras" pueden formarse alternando vocales y consonantes?.*

Dado que la palabra tiene cinco consonantes y cutro vocales, para ir alternando unas u otras necesariamente hemos de empezar en una consonantes:

$$cvcvcvcvc, \qquad c = consonante, \quad v = vocal.$$

Por cada posible colocación de las consonantes, tenemos que contar las posiblidades para colocar las vocales. Es decir el número pedido es el producto de las formas de reordenar las consontantes por las formas de reordenar las vocales.

Las formas de reordenar las consonantes son permutaciones con repetición de 5 elementos de los cuales dos son iguales entres si (las dos eLes):

$$PR_{5;2} = \frac{5!}{2!}.$$

Las formar de reordenar las vocales son son permutaciones con repetición de 4 elementos de los cuales dos son iguales entres si (las dos Aes):

$$PR_{4;2} = \frac{4!}{2!}.$$

En definitiva el número pedido es:

$$PR_{5;2}PR_{4;2} = \frac{5!4!}{2!2!} = 720.$$

(ii) *¿Y con las letras de CANONICA?*

Es análogo al anterior. La única diferencia es que al haber el mismo número de vocales y consonantes, pueden colocarse alternativamente empezando por vocal o por consonante:

$$cvcvcvcv, \quad o, \quad vcvcvcvc, \qquad c = consonante, \quad v = vocal.$$

Queda por tanto:

$$2 \cdot PR_{4;2,2} \cdot PR_{4;2} = 2 \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{4!}{2!} = 144.$$

10.– *Tenemos 11 amigos.*

(i) ¿De cuántas maneras podemos elegir a cinco de ellos para invitarlos a comer?.

Se trata de contar el número de grupos de 5 elementos distintos (no repetidos) escogidos entre 11 posibles, sin importar el orden de elección. Son por tanto combinaciones sin repetición de 11 elementos tomados de 5 en 5.

$$C_{11,5} = \binom{11}{5} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462.$$

(ii) *Si dos son pareja y siempre han de ir juntos, ¿de cuántas maneras podemos ahora invitar a cinco?*

Contamos por separado los casos en los que la pareja no es invitada y los casos en los que si es invitada. Los primeros son las formas de escoger 5 elementos entre un total de 9 (excluimos de los 11 a los dos miembros de la pareja). Son de nuevo combinaciones sin repetición $C_{9,5}$. En los segundos, una vez incluida la pareja tenemos que escoger otros 3 comensales entre los 9 amigos restantes: $C_{9,3}$. En total:

$$C_{9,5} + C_{9,3} = \binom{9}{5} + \binom{9}{3} = \binom{9}{4} + \binom{9}{3} = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

(iii) *Y si dos están peleados y no los podemos invitar juntos, ¿de cuántas maneras podemos invitar a cinco?*

Contamos por separado los casos en los que no invitamos a ninguno de los dos o sólo a uno de ellos. Los primeros como antes son las formas de escoger 5 elementos entre un total de 9, $C_{9,5}$. Los segundos para cada uno de ellos, las formas de elegir a 4 entre los 9 restantes. En total:

$$C_{9,5} + 2C_{9,4} = \binom{9}{5} + 2\binom{9}{4} = 3\binom{9}{4} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 378.$$

12.– *Se reparten* 10 *canicas entre tres niñas, Sabela, Lorena y Rita.*

¿Y si además cada niña recibe al menos dos canicas?.

Si cada una recibe dos canicas al menos, quedan por repartir $10 - 2 \cdot 3 = 4$ canicas. Son combinaciones con repetición de 3 elementos tomados de 4 en 4:

$$CR_{3,4} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15.$$

14.– *Usando sólo ceros y unos,*

(i) *¿Cuántas matrices* 2×3 *pueden formarse?.*

Una matriz 2×3 está formada por 6 números. Cada uno de ellos tiene dos poibilidades 0 o 1. Y el orden en que aparecen diferencia una matriz de otra. Se trata por tanto de contar las formas de elegir 6 números entre 2 posibles pudiendo repetir e importando el orden: variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 6 en 6:

$$VR_{2,6} = 2^6 = 64.$$

O directamente: para el primer puesto de la matriz tenemos dos posibilidades 0 o 1. Por cada una de ellas para el segundo puesto otras dos opciones: $2 \times 2 = 2$. Por cada una de ellas otras dos opciones para el tercer puesto. Reiterando hasta cubirir las seis posiciones:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64.$$

(ii) *¿Cuántas de ellas tienen exactamente tres ceros y tres unos?.*

Se trata de contar las formas de distribuir tres ceros y tres unos en seis posiciones distintas: son permutaciones con repetición de 6 elementos de los cuales 3 y 3 son iguales entre si:

$$PR_{6;3,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20.$$

También puede razonarse así: para formar una matriz con tres ceros y tres unos basta decidir en que tres posiciones de las seis posibles colocaremos los unos. Son combianciones sin repetición de 6 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

(iii) *¿Cuántas matrices* 2×3 *de rango* 1 *pueden formarse?.*

Dado que el rango es el número máximo de filas independientes, las matrices 2×3 de rango 1 necesariamente tienen una fila no nula y la otra es dependiente de esta, es decir, un múltiplo. Como además slo estamos usando unos y ceros, las posibilidades son:

- Matrices con la primera fila nula. Necesariamente la segunda no lo es. Para formar la segunda fila tenemos dos posiblidades para cada una de las tres posiciones; pero hay que retirar la fila formada sólo por ceros: $2^3 - 1 = 7$.

- Matrices con la primera fila no nula. Entonces la segunda o bien es nula o bien es idéntica a la primera. Por cada uno de esos dos casos las opciones para la primera fila son $2^3 - 1 = 7$. Por tanto ambos casos nos dan un total de $7 + 7 = 14$ matrices.

En total: $7 + 14 = 21$.

15.– *Al volver a montar un dispositivo electrónico nos encontramos con cinco cables que pueden ser conectados, cualquiera de ellos, en cinco puntos distintos, pero no recordamos como era su configuración inicial.*

(i) *Si sabemos que en cada punto de conexión va un sólo cable. ¿Cuántas pruebas habría que hacer como máximo hasta dar con la configuración inicial?.*

Se trata de contar las formas de ordenanar los cinco cables en cinco posiciones. Son por tanto permutaciones sin repetición de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

(ii) *Si lo que recordamos es que exactamente uno de los cinco puntos de conexión queda sin cable, pero no sabemos cuál, ¿cuántas pruebas habría que hacer ahora como máximo?.*

Si uno de lo zócalos queda sin cable, los cinco cables se ubicaran sobre las cuatro restantes de manera que dos cables irán conectados a un mismo punto.

Hay 5 posiblidades para elegir el zócalo que queda libre.

Hay 4 posbilidades para elegir el zócalo donde irán dos cables.

Las formas de elegir que dos cables irán en el punto doble de conexión son las formas de elegir dos elementos distintos entre 5 sin importar el orden, es decir combinaciones sin repetición de 5 elementos tomados de 2 en 2: $C_{5,2} = \binom{5}{2}$.

Por últimos los tres cables restantes se ordenan en los tres puntos de conexión restantes: permutaciones de tres elementos, $P_3 = 3!$.

En total:

$$5 \cdot 4 \cdot \binom{5}{2} \cdot 3! = 20 \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1200$$

.

(1 punto)

16.– *Sea P un polígono regular de n lados.*

(i) *¿Cuántas diagonales tiene el polígono?.*

Las diagonales son segmentos que unen pares de vértices no consecutivos (es decir distintos de los lados). El número de pares distintos de vértices son el número de grupos de dos elementos escogidos entre n posibles, sin repetir y sin importar el orden, es decir:

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Descontamos el número de lados:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

(ii) *¿Cuántos triángulos pueden construirse uniendo vértices de P?.*

Un triángulo está determinado por sus tres vértices. Por tanto contamos el número de grupos de tres elementos escogidos entre n posibles, sin repetir y sin importar el orden, es decir:

$$C_{n,3} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

¿Cuántos de ellos están formados sólo por diagonales?.

Del total de triángulos calculado antres descontamos los que tienen algún lado. Distinguimos:

- Los que contienen dos lados consecutivos. Si orientamos el polígono en el sentido de las agujas del reloj, el primero de los lados de uno de esos triángulos puede ser uno cualquiera de los n lados del polígono. Por tanto hay n triángulos con dos lados consecutivos.

- Los que sólo contienen un lado. Hay n formas de elegir el lado que contienen. El vértice restante no puede ser ni los que limitan el lado ni los adyacentes (para evitar que el triángulo tenga dos lados consecutivos). Por tanto hay $n-4$ opciones para ese vértice. En total $n(n-4)$.

En definitiva el número de triángulos formados sólo por diagonales es:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n - n(n-4) = \frac{n(n^2-9n+20)}{6} = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}.$$

I.– *Siete personas suben en un ascensor en la planta baja de un edificio de cinco pisos. Cada una de ellas se apea en alguna de las cinco plantas.*

(i) *¿De cuántas formas pueden bajarse si distinguimos quien se baja en cada piso?.*

Cada posiblle forma de bajarse puede representarse por un grupo ordenado de siete números cada uno de ellos elegido del 1 al 5 que indica en que piso se bajó cada uno de los individuos. Por tanto se trata de contar cuantros grupos de 7 elementos pueden formarse elegidos entre 5 posibles, de manera que importa el orden y puede repetirse. Son variaciones con repetición:

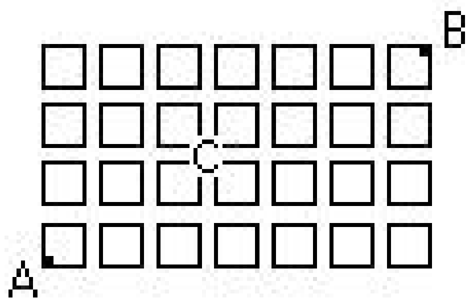
$$VR_{5,7} = 5^7 = 78125.$$

(ii) *¿De cuántas formas pueden bajarse si no distinguimos quien se baja en cada piso, sino únicamente cuántas personas se bajan en cada uno de ellos?.*

La diferencia con el caso anterior es que ahora no importa en que orden se escriban los pisos en los que bajan los individuos, ya que no importa la persona que se bajó en cada uno de ellos. Se trata ahora de contar cuantros grupos de 7 elementos pueden formarse elegidos entre 5 posibles, de manera que NO importa el orden y puede repetirse. Son combinaciones con repetición:

$$CR_{5,7} = 5^7 = \binom{5+7-1}{7} = \binom{11}{7} = 330$$

II.– *Vives en una urbanización que se puede representar esquemáticamente con el siguiente diagrama:*



Una mañana te dispones a desplazarte desde A hasta B. Es claro que para hacerlo tendrás que recorrer al menos 11 tramos (un "tramo" es la longitud del lado de una manzana).

(a) *¿Cuantos recorridos formados por 11 tramos llevan desde A hasta B?*

Para hacer el recorrido en once tramos necesariamente en cada cruce sólo puedes, o bien subir, o bien ir a la derecha. Si bajas o vas a la izquierda necesitarías más de 11 tramos para completar el recorrido. En concreto hay que subir 4 manzanas e ir 7 a la derecha.

Por tanto una ruta de once tramos consiste simplemente en decidir en que orden hacemos los tramos de subida y los de ir a la derecha. Son permutaciones con repetición de 11 elementos donde hay 7 de una clase y 4 de la otra:

$$P(11;7,4) = \frac{11!}{7!4!} = 330$$

(b) *¿Cuántos de 12 tramos?*

Sabemos que el número mínimo de tramos es 11, 4 hacia arriba y 7 a la derecha. Si recorremos algún tramo a la izquieda o hacia abajo, hemos de volver a recorrer otro hacia la derecha o hacia arriba respectivamente, para recuperalo. Por tanto para completar el recorrido de A a B, necesariamente hemos de añadir un número par de tramos al número mínimo 11. Deducimos que es imposible hacerlo en 12 tramos.

(c) *Si deseas evitar a toda costa la intersección C marcada en el dibujo (por motivos que no vienen al caso), ¿cuántos recorridos de 11 tramos puedes seguir?*

Contamos el número de recorridos de 11 tramos que pasan por la intersección C y los descontamos del número de recorridos total calculado en (a).

Para ir de A a C necesitamos 3 tramos a la derecha y 2 hacia arriba. Las posibilidades son $P(5;3,2)$. Para ir de C a B necesitamos 4 tramos a la derecha y 2 hacia arriba. Es decir, $P(6;4,2)$ posiblidades. En total hay

$$P(5;3,2)\cdot P(6;4,2) = \frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{6!}{4!2!} = 150$$

recorridos de 11 tramos pasando por C.

Por tanto el número de recorridos de 11 tramos que no pasan por C es:

$$\frac{11!}{7!4!} - \frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{6!}{4!2!} = 330 - 150 = 180.$$

III.–

i) *¿En el plano afín E_2, cuál es el máximo número de puntos de intersección que producen 12 rectas distintas?.*

Cada par de rectas no paralelas nos produce un punto de intersección. El número máximo de puntos aparece por tanto cuando no hay ningún par de rectas paralelas y hay tantos puntos como formas de agrupar de dos en dos las rectas:

$$C_{12,2} = \binom{12}{2} = \frac{12\cdot 11}{1\cdot 2} = 66.$$

ii) *¿Y si hay al menos cinco rectas paralelas entre si?.*

Si hay cinco rectas paralelas, cualquier par de ellas no determinan un punto de intersección. Por tanto al número calculado en el apartado anterior hay que descontar, los pares de rectas que se pueden formar con las cinco paralelas:

$$C_{12,2} - C_{5,2} = \binom{12}{2} - \binom{5}{2} = 66 - 10 = 56.$$

iii) *¿Y si las rectas contienen a los lados de un dodecágono regular?.*

En este caso los lados opuestos del dodecágono son paralelos; por tanto hay total de puntos calculado en el primer apartado hay que descontar los seis pares de rectas paralelas que no producen puntos de intersección:

$$66 - 6 = 60.$$

IV.– *Sea A un conjunto con n elementos. ¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto A?. Probar que el número de subconjuntos de cardinal par y el número de subconjuntos de cardinal impar coinciden.*

Método I: Dado un subconjunto de A cada elemento puede estar o no en el subconjunto. Es decir hay dos posibilidades para cada elemento de A. Por tanto, en total habrá 2^n posibles subconjuntos.

Veamos ahora que coinciden el número de subconjuntos de cardinal par e impar. Para ello definiremos un criterio que hace corresponder a cada conjunto con un número par de elementos otro con un número impar, y viceversa. Fijamos un elemento $a_0 \in A$. Dado un subconjunto B de A, construimos un subconjunto B' de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} \{n^o \text{ par de elementos}\} & \longrightarrow & \{n^o \text{ impar de elementos}\} \\ B & \longrightarrow & \begin{array}{c} B \cup \{a_0\} \text{ si } a_0 \notin B \\ B \setminus \{a_0\} \text{ si } a_0 \in B \end{array} \end{array}$$

Es decir, si a_0 no está en B, se lo añadimos ($B' = B \cup \{a_0\}$); si a_0 está en B se lo quitamos ($B' = B \setminus \{a_0\}$). De esta forma establecemos una correspondencia biunívoca entre subconjuntos de A con un número par de elementos y subconjuntos de A con un número impar de elementos. Por tanto hay el mismo número de unos y de otros.

Método II: El número de subconjuntos de k elementos que tiene A corresponde precisamente a las combinaciones sin repetición de n elementos tomado de k en k, $C_{n,k} = \binom{n}{k}$. El número total de subconjuntos será:

$$Total = C_{n,0} + C_{n,1} + \ldots + C_{n,n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Pero por el binomio de Newton esto es exactamente $(1+1)^n = 2^n$.

Con este mismo razonamiento el número de subconjuntos con un número par de elementos es:

$$Pares = C_{n,0} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,m} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{m}$$

donde $m = n$ si n es par y $m = n - 1$ si n es impar. El número de subconjuntos con cardinal impar es:

$$Impares = C_{n,1} + C_{n,3} + \ldots + C_{n,m'} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{m'}$$

donde $m' = n-1$ si n es par y $m' = n$ si n es impar. Si ahora calculamos la diferencia entre ambos queda:

$$Pares - Impares = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

Por el binomio de Newton esto es exactamente $(1-1)^n = 0$ y probamos la igualdad entre $Pares$ e $Impares$.

V.– *Utilizando sólo unos y ceros, ¿cuántas matrices* 3×3 *pueden formarse?. ¿Cuántas de ellas tienen traza par?. ¿Cuántas determinante* 3*?.*

Una matriz 3×3 tiene nueve elementos; en cada uno de ellos podemos colocar un cero ó un uno: dos opciones. Por tanto el número de matrices que podemos formar es $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n \quad veces} = 2^9 = 512$.

O también: para forma una matriz 3×3 tenemos que elegir nueve elementos escogidos entre dos posibles; podemos repetirlos y el orden de los elementos diferencia una matriz de otra: se trata de variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 9 en 9:

$$VR_{2,9} = 2^9 = 512.$$

Una matriz con ceros y unos de traza par o bien tiene tres ceros en la diagonal o bien dos unos y un cero.

Matrices con tres ceros en la diagonal: contamos las formas de elegir los seis elementos restantes que pueden ser ceros o unos. Razonando como antes hay 2^6 posibilidades.

Matrices con dos unos y un cero en la diagonal: en primer lugar el cero puede ir en una de las tres posiciones de la diagonal. Por cada una de esas opciones contamos las formas de elegir los seis elementos restantes fuera de la diagonal: 2^6. En total entonces: $3 \cdot 2^6$.

Por tanto las matrices con traza par son:

$$2^6 + 3 \cdot 2^6 = 4 \cdot 2^6 = 2^8 = 246.$$

Finalmente, no hay matrices de determinante tres. Observamos la fórmula de Sarrus para el determinante 3×3 es:

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Dado que en nuestro caso los términos a_{ij} son cero o uno, se tiene que:

$$det(A) \leq 1 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 3$$

Es decir a lo sumo el determinante podría valer tres. Pero para ello tendría que ocurrir que:

$$a_{11}a_{22}a_{33} = a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{21}a_{32} = 1$$

Pero entonces todos los elementos de la matriz serían 1 y ésta tendría determinante cero. Concluimos que es imposible que una matriz con ceros y unos tenga determinante 3.

VI.– *En una caja de bombones hay 3 unidades de cada uno de los 5 tipos existentes. Los bombones de cada tipo son indistinguibles entre sí.*

(a) *Se sacan de la caja 3 bombones (a la vez). Determinar el número de configuraciones posibles.*

Se trata de contar los grupos de 3 elementos que pueden formarse escogidos entre 5 tipos diferentes, pudiendo repetir y sin importar el orden. Son combinaciones con repetición de 5 tipos de elementos tomados de 3 en 3:

$$CR_{5,3} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

(b) *Lo mismo si se sacan 4 bombones.*

En principio es la misma idea que en el apartado anterior; combinaciones con repetición de 5 tipos de elementos tomados de 4 en 4. La única diferencia es que como sólo hay 3 unidades de cada tipo hay que excluir del conteo la posiblidad de los 4 bombones del mismo tipo: cinco opciones (una por cada tipo de bombón). Nos queda:

$$CR_{5,4} - 5 = \binom{5+4-1}{4} - 5 = \binom{8}{4} - 5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 5 = 70 - 5 = 65.$$

VII.– *Se quiere formar una comisión de* 12 *personas elegidas entre* 10 *hombres y* 8 *mujeres. ¿De cuántas formas puede hacerse si*

(i) *no hay ninguna restricción?.*

En total tenemos un grupo de 18 personas de los cuáles queremos seleccionar 12. Se trata de contar por tantos cuántos grupos de 12 elementos pueden formarse con 18 elementos distintos sin poder repetirlos y sin importar el orden. Son combinaciones de 18 elementos tomados de 12 en 12:

$$C_{18,12} = \binom{18}{12} = \binom{18}{6} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 18564.$$

(iii) *debe de haber el mismo número de hombres y mujeres?.*

Contamos las formas de elegir 6 hombres del total de 10. Razonando como antes hay $C_{10,6}$ formas de hacerlo. Por cada una de ellas tenemos que elegir 6 mujeres de entre las 8: $C_{8,6}$. En total el producto de ambas combinaciones:

$$C_{10,6}C_{8,6} = \binom{10}{6}\binom{8}{6} = \binom{10}{4}\binom{8}{2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 5880.$$

(iii) *debe de haber más hombres que mujeres?.*

Las posibilidades son $7, 8, 9, 10$ hombres y respectivamente $5, 4, 3, 2$ mujeres. Según razonamos en el apartado anterior el número de comités con h hombres y m mujeres es:

$$C_{10,h}C_{8,m}.$$

Por tanto el total de comités con más hombres que mujeres es:

$$C_{10,7}C_{8,5} + C_{10,8}C_{8,4} + C_{10,9}C_{8,3} + C_{10,10}C_{8,2} = 10458.$$

VIII.– *Con los dígitos del 1 al 9:*

(i) *¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse?.*

Método I: Para la primera cifra tenermos 9 opciones; para la segunda cifra $9 - 1 = 8$ opciones (no podemos repetir la ya usada); para la tercera $9 - 2 = 7$ opciones (no podemos repetir las dos primeras):

$$9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Método II: Se trate de contar cuantos grupos de 3 elementos escogidos entre 9 posibles sin repetirlos y de forma que el orden distingui un grupo de otro; son variaciones sin repetición de 9 elementos tomados de 3 en 3:

$$V_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

(ii) *¿En cuántos de los anteriores la suma de sus cifras es un número par?.*

Para que la suma de las cifras sea par, o bien aparecen dos impares y una par o bien las tres pares:

- Números con tres cifras pares. Es un problema equivalente al apartado (i) pero ahora sólo con las cifras $2, 4, 6, 8$, es decir, con 4 cifras distintas:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

- Números con una cifra par y dos impares. La cifra par puede aparecer en tres posiciones: PII,IPI,IIP. Para la cifra par hay cuatro opciones: 2,4,6,8. Para las impares, las formas de elegir dos cifras entre cinco (1,3,5,7,9) sin repetir e importando el orden. En total por tanto:

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 240.$$

En defnitiva resultan:

$$24 + 240 = 264.$$

(iii) *¿Cuántos números de cinco cifras distintas pueden formare de manera que éstas aparezcan en orden decreciente?.*

Dado que necesariamente las cifras aparecen en orden decreciente, lo que diferencia un número de otro son las cifras que aparecen y no el orden en que lo hacen. Por tanto se trata de contar el número de grupos de 5 elementos escogidos entre 9 posibles, sin importar el orden y sin repetir. Son combinaciones de 9 elementos tomados de 5 en 5:

$$\binom{9}{5} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126.$$

(1 punto)

IX.– *En una playa se juntan* 13 *amigos y deciden hacer* 4 *equipos para jugar al voleibol, tres de* 3 *jugadores y uno de* 4. *Entre ellos hay un jugador profesional y otro muy torpe. ¿De cuántas forman pueden armarse los equipos si el "torpe" tiene que ir en el equipo de cuatro y el profesional en un equipo de tres?.*

Para elegir a los tres jugadores que acompañaran al torpe en el equipo de 4, tenemos que contar los distintos grupos de 3 elementos escogidos entre 11 posibles (excluimos el jugador profesional y el torpe), sin importar el orden y sin repetir: se trata de combinaciones sin repetición de 11 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{11,3} = \binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Por cada uno de los anteriores posibles equipos de cuatro, para elegir los 2 jugadores que acompañarán al profesional tenemos que contar los distintos grupos de 2 elementos escogidos entre 8 posibles (excluimos los cuatro del equipo anterior y al profesional):

$$C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}$$

Para el tercer equipo seleccionamos 3 jugadores de los 6 restantes:

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Finalmente el cuarto estaría formado por los 3 jugadores que quedan. Ahora dado que es indiferente en que orden se elijan los dos últimos equipos (ojo, no los dos primeros porque tienen cada uno de ellos una estructura especial: contar con el jugador torpe o el profesional) hay que dividir por 2!.

En definitiva las formas de armar los equipos serían:

$$\frac{C_{11,3} \cdot C_{8,2} \cdot C_{6,3}}{2!} = \frac{165 \cdot 28 \cdot 20}{2} = 46200.$$

X.– *Una frutería vende peras, manzanas, naranjas y plátanos, en bandejas de* 6 *piezas de frutas, por ejemplo: una bandeja con* 6 *manzanas; o con* 3 *naranjas,* 2 *peras y un plátano.*

(a) *¿Cuántos tipos de bandejas son posibles?.*

Para cada bandeja formamos grupos de seis elementos escogidos entre cuatro tipos distintos, pudiendo repetirlos. Se trata de combinaciones con repetición de cuatro elementos tomados de seis en seis:

$$CR_{4,6} = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84.$$

(b) *¿Cuántos con al menos una fruta de cada clase?.*

Si al menos hay una fruta de cada clase, sólo tenemos que contar de cuantas formas podemos elegir las dos restantes. Análogamente al apartado anterior, serían:

$$CR_{4,2} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10.$$