1.– *Dados los siguientes conjuntos:*

$$\begin{aligned} A &= \{2,3,5,7,11\} \\ B &= \{x \in Z | x \geq 4\} \\ C &= \{x \in Z | |x| < 5\} \\ D &= \{x \in N | x \text{ es impar}\} \end{aligned}$$

Hallar:

i) $(A \cap B) \cup C$.

Tenemos:

$$A \cap B = \{5,7,11\}.$$

y

$$C = \{0,-1,1,2,-2,3,-3,4,-4\}$$

de donde:

$$(A \cap B) \cup C = \{0,-1,1,2,-2,3,-3,4,-4,5,7,11\}.$$

ii) $(Z - D) \cap C$.

$$\begin{aligned} Z - D &= \{x \in Z | x \notin D\} = \{x \in Z | x \text{ no es impar o no positivo}\} = \\ &= \{x \in Z | x \text{ es par o no positivo}\} \end{aligned}$$

Entonces:

$$(Z - D) \cap C = \{x \in C | x \notin D\} = \{0,-1,2,-2,-3,4,-4\}.$$

iii) $(C \cup A) \cap B$.

$$C \cup A = \{0,-1,1,2,-2,3,-3,4,-4,5,7,11\}.$$

y entonces:

$$(C \cup A) \cap B = \{5,7,11\}.$$

iv) $(A \cup (Z - B)) \cap (C \cup D)$.

Podemos aplicar la propiedad distributiva y queda:

$$(A \cup (Z - B)) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup ((Z - B) \cap C) \cup ((Z - B) \cap D)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
&A \cap C = \{2, 3\} \\
&A \cap D = \{3, 5, 7, 11\} \\
&(Z - B) \cap C = \{0, -1, 1, 2, -2, 3, -3, -4\} \\
&(Z - B) \cap D = \{2, 3\}
\end{aligned}$$

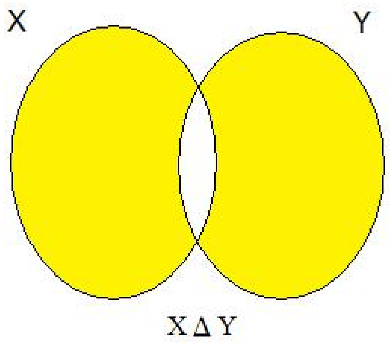
de donde:

$$(A \cup (Z - B)) \cap (C \cup D) = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 7, 11\}.$$

2.– *Dados dos conjuntos X e Y se define la diferencia simétrica de ambos como:*

$$X \Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

Si uno representa gráficamente esta operación (sombreando ambos conjuntos, la unión, excepto la parte común, la intersección) queda:



El dibujo ayuda a entender intuitivamente el problema.

(i) *Sea $A = \{a \in \mathbb{N} | 1 \leq a \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x^2 < 20\}$, $C = \{1, 2, 4\}$. Calcular $(A \cup B)\Delta C$, $A\Delta(B \cap C)$ y $C\Delta B$.*

Tenemos:

$$\begin{aligned}
&A = \{a \in \mathbb{N} | 1 \leq a \leq 3\} = \{1, 2, 3\} \\
&B = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x^2 < 20\} = \{x \in \mathbb{N} | 1 < \sqrt{x} < \sqrt{20}\} = \{2, 3, 4\} \\
&C = \{1, 2, 4\}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B \cap C = \{2, 4\}.$$

y

$$\begin{aligned}
(A \cup B)\Delta C &= \{1,2,3,4\}\Delta\{1,2,4\} = (\{1,2,3,4\} \cup \{1,2,4\}) - (\{1,2,3,4\} \cap \{1,2,4\}) = \\
&= \{1,2,3,4\} - \{1,2,4\} = \{3\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\Delta(B \cap C) &= \{1,2,3\}\Delta\{2,4\} = (\{1,2,3\} \cup \{2,4\}) - (\{1,2,3\} \cap \{2,4\}) = \\
&= \{1,2,3,4\} - \{2\} = \{1,3,4\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C\Delta B &= \{1,2,4\}\Delta\{2,3,4\} = (\{1,2,4\} \cup \{2,3,4\}) - (\{1,2,4\} \cap \{2,3,4\}) = \\
&= \{1,2,3,4\} - \{2,4\} = \{1,3\}.
\end{aligned}$$

(ii) *Razonar si es cierto o no en general que:*

$$(X \cup Y)\Delta Z = (X\Delta Z) \cup (Y\Delta Z)$$

Es falso. Basta tomar como ejemplo los conjuntos del apartado anterior: $X = A = \{1,2,3\}, \quad Y = B = \{2,3,4\}, \quad Z = C = \{1,2,4\}$.

Se tiene que (está calculado en el apartado anterior)

$$(X \cup Y)\Delta Z = (A \cup B)\Delta C = \{3\}.$$

y:

$$(Y\Delta Z) = (B\Delta C) = (C\Delta B) = \{1,3\}.$$

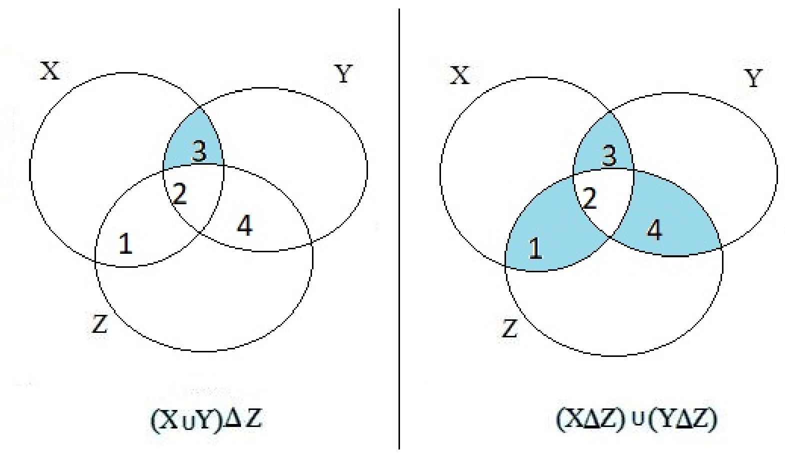
Además:

$$(X\Delta Z) = (X \cup Z) - (X \cap Z) = \{1,2,3,4\} - \{1,2\} = \{3,4\}.$$

Por tanto:

$$(X\Delta Z) \cup (Y\Delta Z) = \{1,3,4\} \neq \{3\} = (X \cup Y)\Delta Z.$$

Visulamente:



3.– *Sean A, B, C tres conjuntos. Razona la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:*

(ii) *Si $A \subset B$ entonces $A \cap C = B \cap C$.*

FALSO. Por ejemplo si $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{1, 2\}$, se tiene que $A \subset B$ pero:

$$A \cap C = \{1\} \neq \{1, 2\} = B \cap C.$$

(v) Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $(A \cup C) \cap (B \cap C) = \emptyset$.

FALSO. Por ejemplo $A = \{1\}$, $B = C = \{2\}$. Se tiene que $A \cap B = \emptyset$ pero:

$$(A \cup C) \cap (B \cap C) = (\{1\} \cup \{2\}) \cap (\{2\} \cap \{2\}) = \{1, 2\} \cap \{2\} = \{2\}.$$

4.– *Sea $f : X \to Y$ una aplicación, y sean A, B dos subconjuntos de X. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas en general y para las que resulten no serlo, si son verdaderas bajo la hipótesis suplementaria de que f sea inyectiva o sobreyectiva.*

(c) $\boxed{f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)}$

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Rightarrow y = f(x), x \in A \cap B \Rightarrow y = f(x), x \in A \text{ y } x \in B \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = f(x), x \in A \text{ e } y = f(x), x \in B \Rightarrow y \in f(A) \text{ e } y \in f(B) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

Vemos que es CIERTO SIEMPRE.

(d) $\boxed{f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)}$ (¡OJO!)

$$y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow y \in f(A) \text{ e } y \in f(B) \Rightarrow y = f(x), x \in A \text{ e } y = f(x'), x' \in B$$

Cuidado! Ahora no podemos deducir que $y = f(x)$ con $x \in A \cap B$. Porque x pudiera ser distinto que x', y por tanto pudiera ocurrir que $x \in A$, pero $x \notin B$.

Sin embargo si suponemos f INYECTIVA, sabemos que dos elementos que tienen la misma imagen son el mismo, luego $x = x'$, y entonces la propiedad si que es cierta.

Un ejemplo donde f NO es inyectiva y no se cumple la propiedad es:

$$\begin{aligned} &X = \text{números naturales} \\ &Y = \mathbb{R} \\ &f : X \to Y, f(n) = 0, \text{ para cualquier } n \text{ en } X \\ &A = \text{números pares} \\ &B = \text{números impares} \end{aligned}$$

En este caso:

$$\begin{aligned}
&f(A) = \{0\}\\
&f(B) = \{0\}\\
&f(A) \cap f(B) = \{0\}\\
&A \cap B = \emptyset\\
&f(A \cap B) = \emptyset
\end{aligned}$$

luego vemos aquí que $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$.

(e) $\boxed{f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)}$ (¡OJO!)

$$y \in f(X \setminus A) \Rightarrow y = f(x), x \in X, x \notin A$$

Vemos que y es imagen de un elemento x que no está en A. Pero, ¿podemos asegurar entonces que y no está en $f(A)$?. En general NO podemos asegurarlo. De nuevo si f no es inyectiva, pudiera haber otro elemento $x' \in A$, $x \neq x$, tal que $f(x') = f(x) = y$.

Así la propiedad es cierta si f es INYECTIVA.

En el ejemplo del apartado anterior.

$$\begin{aligned}
&f(X \setminus A) = \{0\}\\
&f(A) = \{0\}\\
&Y \setminus f(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}
\end{aligned}$$

y por tanto $f(X \setminus A) \not\subset Y \setminus f(A)$.

(f) $\boxed{Y \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)}$ (¡OJO!)

$$y \in Y \setminus f(A) \Rightarrow y \in Y, y \notin f(A) \Rightarrow y \neq f(x) \text{ para todo } x \in A \Rightarrow$$

Sabemos que y no es imagen de ningún elemento de A. Sin embargo, si f NO es SOBREYECTIVA pudiera ocurrir que y no fuese imagen de ningún elemento de X y por tanto $y \notin f(X \setminus A)$.

Así la propiedad NO es cierta en general. Si es cierta si f es sobreyectiva.

En el ejemplo anterior tampoco se cumple $Y \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$.

5.– *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = +\sqrt{x}$. ¿Es una aplicación inversa de la otra? Razonar la respuesta.*

Para que f y g sean una inversa de la otra, ha de cumplirse:

$$f \circ g = id_{\mathbb{R}^+}; \qquad g \circ f = id_{\mathbb{R}};$$

Primero sea $x \in \mathbb{R}^+$. Tenemos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(+\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

luego se cumple $g \circ f = id_{\mathbb{R}^+}$.

Sea ahora $x \in \mathbb{R}$. Se tiene:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = +\sqrt{x^2} = |x|$$

Por tanto si x es negativo no se cumple que $(g \circ f)(x) = x$ y vemos que las aplicaciones no son inversas la una de la otra.

En realidad ya sabíamos que esto tenía que ser así: f no es inyectiva y g no es sobreyectiva, luego nunca pueden tener inversa.

Intuitivamente la raíz cuadrada es la inversa de la función elevar al cuadrado, pero para que las cosas funcionen bien, hemos de restringirnos únicamente a los números no negativos.

6.– *Dadas las siguientes aplicaciones estudiar si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Calcular también las aplicaciones inversas de las que resulten ser biyectivas*

(a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto cos(x) + 1$.

f_1 **NO es inyectiva**, porque existen ángulos diferentes con el mismo coseno. En concreto el coseno es una función de período 2π, es decir, $cos(x)+1 = cos(x+2k\pi)+1$ para cualquier número entero k.

f_1 **NO es sobreyectiva**, porque el conjunto imagen es $[0, 2]$, ya que el coseno toma cualquier valor real comprendido entre -1 y 1 ambos inclusive. Al sumarle uno, nos quedamos entre 0 y 2. Sin embargo el conjunto final es todo $\mathbb{R}$ y no coincide por tanto con la imagen.

f_1 **NO es biyectiva**, porque no es inyectiva (o porque no es sobreyectiva).

(a') $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 2], x \mapsto cos(x) + 1$.

Es análogo al caso anterior; explicamos las diferencias.

f_1 **NO es inyectiva**.

f_1 **SI es sobreyectiva**, porque el conjunto imagen *ahora* coincide con el final.

f_1 **NO es biyectiva**, porque no es inyectiva.

(a") $f_1 : [0, \pi] \longrightarrow [0, 2], x \mapsto cos(x) + 1$.

De nuevo vemos las diferencias con los casos anteriores.

f_1 **SI es inyectiva**, porque dos ángulos comprendidos en $[0, \pi]$ siempre tienen cosenos diferentes.

f_1 **SI es sobreyectiva**, porque el conjunto imagen es igual al conjunto final.

f_1 **SI es biyectiva**, porque no es inyectiva y sobreyectiva. La inversa es:

$$f_1^{-1} : [0, 2] \longrightarrow [0, \pi]$$

definida como:

$$f^{-1}(y) = arcos(y-1).$$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y$, si $y^2 = x$.

Estamos definiendo la "aplicación"' que lleva un x en un número real que elevado al cuadrado nos de x.

Sin embargo en realidad, f_2 **NO es una aplicación**, porque cada elemento x mayor que cero tendría dos imágenes, ya que hay dos números que elevados al cuadrado nos dan x: $y = \sqrt{x}$ ó $y = -\sqrt{x}$.

(b') $f_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto y$, si $y^2 = x$.

Ahora f_2 **SI es una aplicación**. La diferencia con el caso anterior es que ahora como conjunto final tomamos sólo los números NO negativos. Entonces para cada $x \in \mathbb{R}^+$ existe un **único** $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^2 = x$; en concreto $y = +\sqrt{x}$.

Sabemos por tanto que la aplicación puede escribirse ahora como $f_2(x) = +\sqrt{(x)}$.

f_2 **SI es inyectiva.** Ya que dados $x, z \in \mathbb{R}^+$ cualesquiera, si $f_2(x) = f_2(z)$ entonces $\sqrt{(x)} = \sqrt{(z)}$ luego elevando al cuadrado obtenemos $x = z$.

f_2 **SI es sobreyectiva.** Ya que cualquier $y \in \mathbb{R}^+$ es imagen de $x = y^2$, porque, $f_2(x) = f_2(y^2) = \sqrt{y^2} = |y| = y$.

f_2 **SI es biyectiva.** Por ser inyectiva y sobreyectiva. Por tanto tiene inversa. Su inversa es:

$$f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, y \mapsto y^2$$

Es la inversa porque $f_2^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$ y $f_2(f_2^{-1}(y)) = +\sqrt{y^2} = |y| = y$, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}^+$.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto tg(x)$.

De nuevo hay que tener cuidado. En realidad f_3 **NO es una aplicación**, porque hay puntos del conjunto inicial dónde no está definida la tangente. En concreto aquellos en los que se anula el coseno. Por ejemplo para $x = \pi/2$.

(d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^9$.

f_4 **es inyectiva**, ya que si $x_1^9 = x_2^9$ entonces $x_1 = x_2$ (OJO: esto no sería cierto si el exponente fuese par ya que x y $-x$ elevados a exponente par dan el mismo resultado).

f_4 **es sobreyectiva**, ya que dado cualquier $y \in R$, tomando $x = y^{1/9}$ se cumple que $f_4(x) = (y^{1/9})^9 = y$.

f_4 **es biyectiva**, porque es inyectiva y sobreyectiva. La aplicación inversa es:

$$f_4^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{1/9}$$

(e) $f_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n!$.

f_5 **es inyectiva**, ya que dos números distintos tienen distinto factorial. Veámoslo rigurosamente. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Supongamos que son distintos. Entonces uno es mayor que el otro. Suponemos por ejemplo $m > n$. Entonces:

$$m! = 1.2.\ldots.n.(n+1).\ldots.m = n!(n+1).\ldots.m \text{ y por tanto } m! > n! \text{ y } f_5(m) \neq f_5(n).$$

f_5 **NO es sobreyectiva**, porque el conjunto final y el imagen son diferentes, ya que hay números naturales que no son factorial de ningún otro. De hecho, hemos visto que el factorial es una función creciente, es decir si $m > n$, $m! > n!$. Los factoriales de los primeros números son $1, 2, 6, \ldots$ luego vemos que quedan números (p.ej. $3, 4, 5$) que no son factorial de ningún otro.

f_5 **NO es biyectiva** porque no es sobreyectiva.

(i) $f_9 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 1/x)$.

f_9 **es inyectiva**. Es bastante claro porque en la primera componente la aplicación es la identidad. Es decir, si $f_9(x_1) = f_9(x_2)$, entonces $(x_1, 1/x_1) = (x_2, 1/x_2)$ y por tanto $x_1 = x_2$.

f_9 **NO es sobreyectiva**, porque el conjunto imagen es diferente del conjunto final. En particular, no hay ningún elemento $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que su imagen sea $(0, 0)$ ya que $f(x) = (x, 1/x)$ y $1/x$ nunca es nulo.

f_9 **NO es biyectiva**, porque no es sobreyectiva.

7.– *Sean A, B, C, D conjuntos, f una aplicación de A en B, g una aplicación de B en C, h una aplicación de C en D. Probar que si $g \circ f$ y $h \circ g$ son biyectivas, entonces de hecho f, g y h son biyectivas.*

Tenemos las aplicaciones:

$$\begin{array}{c} f : A \longrightarrow B \\ g : B \longrightarrow C \\ h : C \longrightarrow D \end{array}$$

Y consideramos las composiciones:

$$\begin{array}{c} g \circ f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \\ h \circ g : B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \end{array}$$

Supongamos que son biyectivas, es decir, inyectivas y sobreyectivas.

Por las propiedades de la composición con respecto a la sobreyectivdad e inyectividad, sabemos que:

$$\begin{array}{c} g \circ f \text{ inyectiva} \Rightarrow f \text{ inyectiva} \\ h \circ g \text{ inyectiva} \Rightarrow g \text{ inyectiva} \end{array}$$

y también:

$$\begin{array}{c} g \circ f \text{ sobreyectiva} \Rightarrow g \text{ sobreyectiva} \\ h \circ g \text{ sobreyectiva} \Rightarrow h \text{ sobreyectiva} \end{array}$$

Vemos que g es inyectiva y sobreyectiva, y por tanto es biyectiva.

Ahora recordemos que si g es biyectiva, g^{-1} es biyectiva y además:

$$g^{-1} \circ g = id_B$$
$$g \circ g^{-1} = id_C$$

Como la composición de aplicaciones biyectivas es biyectiva, obtenemos la biyectividad de f y de h:

$$g^{-1} \circ (g \circ f) = (g^{-1} \circ g) \circ f = id_B \circ f = f$$

$$(h \circ g) \circ g^{-1} = h \circ (g \circ g^{-1}) = h \circ id_C = h$$

9.– *Sea $f : A \to B$ una aplicación. Demostrar que*

(a) f es inyectiva si y sólo si existe una aplicación $g : B \to A$ tal que $g \circ f = i_A$.

(b) f es sobreyectiva si y sólo si existe una aplicación $h : B \to A$ tal que $f \circ h = i_B$.

(a) **Veamos que:** f **inyectiva** $\quad \Rightarrow \quad \exists g : B \to A / g \circ f = i_A$

Se trata de definir una aplicación g de B en A que, sobre elementos de la forma $f(x)$ nos permita recuperar x. Sobre elementos que no sean de la forma $f(x)$ nos da igual como funcione. Podemos por ejemplo "enviarlos" sobre un elemento fijo a_0 cualquiera de A. Definimos por tanto:

$$g(y) = \begin{cases} x, & \text{si } y = f(x) \text{ para algún } x \in A; \\ a_0, & \text{si } y \neq f(x) \text{ para todo } x \in A. \end{cases}$$

Primero hay que ver que es efectivamente una aplicación, es decir, que está definida de manera unívoca. Podría ocurrir que $y = f(x_1)$ pero también $y = f(x_2)$ con $x_1, x_2 \in A$. Pero **por ser inyectiva** si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$, luego está bien definida.

Es claro además por construcción que:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$$

y así $g \circ f = id_A$.

Veamos el recíproco: $\exists g : B \to A / g \circ f = i_A \quad \Rightarrow \quad f$ **inyectiva**

Simplemente tenemos en cuenta que i_A es biyectiva y en particular inyectiva. Por tanto si $g \circ f = i_A$, entonces f es inyectiva.

(b) **Veamos que:** f **sobreyectiva** $\quad \Rightarrow \quad \exists h : B \to A / f \circ h = i_B$

Ahora por ser f sobreyectiva, dado $y \in B$ siempre podemos **elegir un** elemento x que verifica $f(x) = y$. Llamamos a este elemento $h(y)$ y tenemos definida una aplicación $h : B \longrightarrow A$. Es importante darse cuenta de que si f no es inyectiva no hay un único elemento que cumpla $f(x) = y$; ELIGIENDO UNO para cada $y \in B$, h está definida de manera unívoca.

Por la propia construcción de h se cumple que, dado $y \in B$:

$$(f \circ h)(y) = f(h(y)) = y$$

y así $f \circ h = id_B$.

Veamos el recíproco: $\exists h : B \to A / f \circ h = i_B \quad \Rightarrow \quad f$ **sobreyectiva**

Simplemente tenemos en cuenta que i_B es biyectiva y en particular sobreyectiva. Por tanto si $f \circ h = i_A$, entonces f es sobreyectiva.

10.– *Sean X e Y conjuntos y $f : X \to Y$ una aplciación. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *f es inyectiva.*

(b) *Para cualesquiera subconjuntos A, B de X tales que $A \cap B = \emptyset$, se cumple $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.*

- Supongamos primero que f es inyectiva. Veamos que se cumple la condición (b). Sean A, B subconjuntos de X tales que $A \cap B = \emptyset$. Si la condición no fuese cierta, entonces $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$, es decir, existiría $y \in f(A) \cap f(B)$. Por tanto $y = f(a) = f(b)$ para algún $a \in A$ y $b \in B$. Pero por ser inyectiva si $f(a) = f(B)$ entonces $a = b$ y $A \cap B \neq \emptyset$, con lo cual llegaríamos a una contradicción.

- Supongamos ahora que cumple la condición (b). Veamos que f es inyectiva. Sean $a, b \in B$; queremos ver que si $a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$. Pero si $a \neq b$ entonces tomamos los subconjuntos de X, $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$ y se verifica que $A \cap B = \emptyset$. Entonces por la condición (b), $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ lo que significa que a y b tienen distinta imagen por f.

(Primer parcial, febrero 2003)
