

1.– *Dados los siguientes conjuntos:*

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 4\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 5\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es impar}\}$$

*Hallar:*

i)  $(A \cap B) \cup C$ .

Tenemos:

$$A \cap B = \{5, 7, 11\}.$$

y

$$C = \{0, -1, 1, 2, -2, 3, -3, 4, -4\}$$

de donde:

$$(A \cap B) \cup C = \{0, -1, 1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, 7, 11\}.$$

ii)  $(\mathbb{Z} - D) \cap C$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} - D &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \notin D\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ no es impar o no positivo}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es par o no positivo}\} \end{aligned}$$

Entonces:

$$(\mathbb{Z} - D) \cap C = \{x \in C \mid x \notin D\} = \{0, -1, 2, -2, -3, 4, -4\}.$$

iii)  $(C \cup A) \cap B$ .

$$C \cup A = \{0, -1, 1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, 7, 11\}.$$

y entonces:

$$(C \cup A) \cap B = \{5, 7, 11\}.$$

iv)  $(A \cup (\mathbb{Z} - B)) \cap (C \cup D)$ .

Podemos aplicar la propiedad distributiva y queda:

$$(A \cup (\mathbb{Z} - B)) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup ((\mathbb{Z} - B) \cap C) \cup ((\mathbb{Z} - B) \cap D)$$

Entonces:

$$A \cap C = \{2, 3\}$$

$$A \cap D = \{3, 5, 7, 11\}$$

$$(Z - B) \cap C = \{0, -1, 1, 2, -2, 3, -3, -4\}$$

$$(Z - B) \cap D = \{2, 3\}$$

de donde:

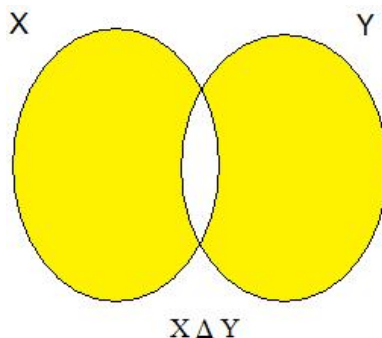
$$(A \cup (Z - B)) \cap (C \cup D) = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 7, 11\}.$$

---

2.- *Dados dos conjuntos X e Y se define la diferencia simétrica de ambos como:*

$$X \Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

Si uno representa gráficamente esta operación (sombreado ambos conjuntos, la unión, excepto la parte común, la intersección) queda:



El dibujo ayuda a entender intuitivamente el problema.

- (i) *Sea*  $A = \{a \in \mathbb{N} | 1 \leq a \leq 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x^2 < 20\}$ ,  $C = \{1, 2, 4\}$ . *Calcular*  $(A \cup B) \Delta C$ ,  $A \Delta (B \cap C)$  *y*  $C \Delta B$ .

Tenemos:

$$A = \{a \in \mathbb{N} | 1 \leq a \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x^2 < 20\} = \{x \in \mathbb{N} | 1 < \sqrt{x} < \sqrt{20}\} = \{2, 3, 4\}$$

$$C = \{1, 2, 4\}$$

Entonces:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B \cap C = \{2, 4\}.$$

y

$$(A \cup B) \Delta C = \{1, 2, 3, 4\} \Delta \{1, 2, 4\} = (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 4\}) - (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 4\}) = \\ = \{1, 2, 3, 4\} - \{1, 2, 4\} = \{3\}.$$

$$A \Delta (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \Delta \{2, 4\} = (\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4\}) - (\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4\}) = \\ = \{1, 2, 3, 4\} - \{2\} = \{1, 3, 4\}.$$

$$C \Delta B = \{1, 2, 4\} \Delta \{2, 3, 4\} = (\{1, 2, 4\} \cup \{2, 3, 4\}) - (\{1, 2, 4\} \cap \{2, 3, 4\}) = \\ = \{1, 2, 3, 4\} - \{2, 4\} = \{1, 3\}.$$

---

3.— Sean  $A, B, C$  tres conjuntos. Razona la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

(iv) Si  $A \cup B = A \cap B$  entonces  $A = B$ .

VERDADERO. Supongamos que  $A \cup B = A \cap B$ . Veamos primero que  $A \subset B$ :

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B = A \cap B \Rightarrow x \in B.$$

Y análogamente  $B \subset A$ :

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B = A \cap B \Rightarrow x \in A.$$

(v) Si  $A \cap B = \emptyset$  entonces  $(A \cup C) \cap (B \cap C) = \emptyset$ .

FALSO. Por ejemplo  $A = \{1\}$ ,  $B = C = \{2\}$ . Se tiene que  $A \cap B = \emptyset$  pero:

$$(A \cup C) \cap (B \cap C) = (\{1\} \cup \{2\}) \cap (\{2\} \cap \{2\}) = \{1, 2\} \cap \{2\} = \{2\}.$$

(vi) Si  $A \cap B = B \cap C = \emptyset$  entonces  $A \cap C = \emptyset$ .

FALSO. Por ejemplo  $A = C = \{1\}$  y  $B = \{2\}$ . Se tiene que:

$$A \cap B = \{1\} \cap \{2\} = \emptyset, \quad B \cap C = \{2\} \cap \{1\} = \emptyset$$

pero:

$$A \cap C = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}.$$

---

4.— Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación, y sean  $A, B$  dos subconjuntos de  $X$ . Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas en general y para las que resulten no serlo, si son verdaderas bajo la hipótesis suplementaria de que  $f$  sea inyectiva o sobreyectiva.

(a)  $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

$$y \in f(A \cup B) \Rightarrow y = f(x), x \in A \cup B \Rightarrow y = f(x), x \in A \text{ ó } x \in B \Rightarrow \\ \Rightarrow y \in f(A) \text{ ó } y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$$

Por tanto ES CIERTO SIEMPRE.

(b)  $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

$$y \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow y \in f(A) \text{ ó } y \in f(B) \Rightarrow y = f(x), x \in A \text{ ó } y = f(x'), x' \in B \Rightarrow \\ \Rightarrow y = f(x), x \in A \cup B \Rightarrow y \in f(A \cup B)$$

Por tanto ES CIERTO SIEMPRE. Como consecuencia de (a) y (b):

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

(e)  $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$  (¡OJO!)

$$y \in f(X \setminus A) \Rightarrow y = f(x), x \in X, x \notin A$$

Vemos que  $y$  es imagen de un elemento  $x$  que no está en  $A$ . Pero ¿podemos asegurar entonces que  $y$  no está en  $f(A)$ ?. En general NO podemos asegurarlo. De nuevo si  $f$  no es inyectiva, pudiera haber otro elemento  $x' \in A$ ,  $x' \neq x$ , tal que  $f(x') = f(x) = y$ .

Así la propiedad es cierta si  $f$  es INYECTIVA.

En el ejemplo del apartado anterior.

$$f(X \setminus A) = \{0\}$$

$$f(A) = \{0\}$$

$$Y \setminus f(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

y por tanto  $f(X \setminus A) \not\subset Y \setminus f(A)$ .

(f)  $Y \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$  (¡OJO!)

$$y \in Y \setminus f(A) \Rightarrow y \in Y, y \notin f(A) \Rightarrow y \neq f(x) \text{ para todo } x \in A \Rightarrow$$

Sabemos que  $y$  no es imagen de ningún elemento de  $A$ . Sin embargo, si  $f$  NO es SOBREYECTIVA pudiera ocurrir que  $y$  no fuese imagen de ningún elemento de  $X$  y por tanto  $y \notin f(X \setminus A)$ .

Así la propiedad NO es cierta en general. Si es cierta si  $f$  es sobreyectiva.

En el ejemplo anterior tampoco se cumple  $Y \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$ .

- 5.- Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida por  $f(x) = x^2$  y  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = +\sqrt{x}$ .  
¿Es una aplicación inversa de la otra? Razonar la respuesta.

Para que  $f$  y  $g$  sean una inversa de la otra, ha de cumplirse:

$$f \circ g = id_{\mathbb{R}^+}; \quad g \circ f = id_{\mathbb{R}};$$

Primero sea  $x \in \mathbb{R}^+$ . Tenemos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(+\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

luego se cumple  $g \circ f = id_{\mathbb{R}^+}$ .

Sea ahora  $x \in \mathbb{R}$ . Se tiene:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = +\sqrt{x^2} = |x|$$

Por tanto si  $x$  es negativo no se cumple que  $(g \circ f)(x) = x$  y vemos que las aplicaciones no son inversas la una de la otra.

En realidad ya sabíamos que esto tenía que ser así:  $f$  no es inyectiva y  $g$  no es sobreyectiva, luego nunca pueden tener inversa.

Intuitivamente la raíz cuadrada es la inversa de la función elevar al cuadrado, pero para que las cosas funcionen bien, hemos de restringirnos únicamente a los números no negativos.

- 
- 6.- Dadas las siguientes aplicaciones estudiar si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Calcular también las aplicaciones inversas de las que resulten ser biyectivas

- (a)  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x) + 1$ .

$f_1$  **NO es inyectiva**, porque existen ángulos diferentes con el mismo coseno. En concreto el coseno es una función de período  $2\pi$ , es decir,  $\cos(x) + 1 = \cos(x + 2k\pi) + 1$  para cualquier número entero  $k$ .

$f_1$  **NO es sobreyectiva**, porque el conjunto imagen es  $[0, 2]$ , ya que el coseno toma cualquier valor real comprendido entre  $-1$  y  $1$  ambos inclusive. Al sumarle uno, nos quedamos entre  $0$  y  $2$ . Sin embargo el conjunto final es todo  $\mathbb{R}$  y no coincide por tanto con la imagen.

$f_1$  **NO es biyectiva**, porque no es inyectiva (o porque no es sobreyectiva).

- (a')  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow [0, 2], x \mapsto \cos(x) + 1$ .

Es análogo al caso anterior; explicamos las diferencias.

$f_1$  **NO es inyectiva**.

$f_1$  **SI es sobreyectiva**, porque el conjunto imagen *ahora* coincide con el final.

$f_1$  **NO es biyectiva**, porque no es inyectiva.

- (a'')  $f_1 : [0, \pi] \rightarrow [0, 2], x \mapsto \cos(x) + 1$ .

De nuevo vemos las diferencias con los casos anteriores.

$f_1$  **SI es inyectiva**, porque dos ángulos comprendidos en  $[0, \pi]$  siempre tienen cosenos diferentes.

$f_1$  **SI es sobreyectiva**, porque el conjunto imagen es igual al conjunto final.

$f_1$  **SI es biyectiva**, porque no es inyectiva y sobreyectiva. La inversa es:

$$f_1^{-1} : [0, 2] \longrightarrow [0, \pi]$$

definida como:

$$f^{-1}(y) = \arccos(y - 1).$$

(b)  $f_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y$ , si  $y^2 = x$ .

Estamos definiendo la "aplicación" que lleva un  $x$  en un número real que elevado al cuadrado nos da  $x$ .

Sin embargo en realidad,  $f_2$  **NO es una aplicación**, porque cada elemento  $x$  mayor que cero tendría dos imágenes, ya que hay dos números que elevados al cuadrado nos dan  $x$ :  $y = \sqrt{x}$  ó  $y = -\sqrt{x}$ .

(b')  $f_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto y$ , si  $y^2 = x$ .

Ahora  $f_2$  **SI es una aplicación**. La diferencia con el caso anterior es que ahora como conjunto final tomamos sólo los números NO negativos. Entonces para cada  $x \in \mathbb{R}^+$  existe un **único**  $y \in \mathbb{R}^+$  tal que  $y^2 = x$ ; en concreto  $y = +\sqrt{x}$ .

Sabemos por tanto que la aplicación puede escribirse ahora como  $f_2(x) = +\sqrt{x}$ .

$f_2$  **SI es inyectiva**. Ya que dados  $x, z \in \mathbb{R}^+$  cualesquiera, si  $f_2(x) = f_2(z)$  entonces  $\sqrt{x} = \sqrt{z}$  luego elevando al cuadrado obtenemos  $x = z$ .

$f_2$  **SI es sobreyectiva**. Ya que cualquier  $y \in \mathbb{R}^+$  es imagen de  $x = y^2$ , porque,  $f_2(x) = f_2(y^2) = \sqrt{y^2} = |y| = y$ .

$f_2$  **SI es biyectiva**. Por ser inyectiva y sobreyectiva. Por tanto tiene inversa. Su inversa es:

$$f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, y \mapsto y^2$$

Es la inversa porque  $f_2^{-1}(f_2(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$  y  $f_2(f_2^{-1}(y)) = +\sqrt{y^2} = |y| = y$ , para cualesquiera  $x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+$ .

(c)  $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{tg}(x)$ .

De nuevo hay que tener cuidado. En realidad  $f_3$  **NO es una aplicación**, porque hay puntos del conjunto inicial donde no está definida la tangente. En concreto aquellos en los que se anula el coseno. Por ejemplo para  $x = \pi/2$ .

(d)  $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^9$ .

$f_4$  **es inyectiva**, ya que si  $x_1^9 = x_2^9$  entonces  $x_1 = x_2$  (OJO: esto no sería cierto si el exponente fuese par ya que  $x$  y  $-x$  elevados a exponente par dan el mismo resultado).

$f_4$  es **sobreyectiva**, ya que dado cualquier  $y \in \mathbb{R}$ , tomando  $x = \sqrt[9]{y}$  se cumple que  $f_4(x) = (\sqrt[9]{y})^9 = y$ .

$f_4$  es **biyectiva**, porque es inyectiva y sobreyectiva. La aplicación inversa es:

$$f_4^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{1/9}$$

(e)  $f_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n!$ .

$f_5$  es **inyectiva**, ya que dos números distintos tienen distinto factorial. Veámoslo rigurosamente. Sean  $m, n \in \mathbb{N}$ . Supongamos que son distintos. Entonces uno es mayor que el otro. Suponemos por ejemplo  $m > n$ . Entonces:

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot m = n!(n+1) \cdot \dots \cdot m \text{ y por tanto } m! > n! \text{ y } f_5(m) \neq f_5(n).$$

$f_5$  **NO es sobreyectiva**, porque el conjunto final y el imagen son diferentes, ya que hay números naturales que no son factorial de ningún otro. De hecho, hemos visto que el factorial es una función creciente, es decir si  $m > n$ ,  $m! > n!$ . Los factoriales de los primeros números son 1, 2, 6, ... luego vemos que quedan números (p.ej. 3, 4, 5) que no son factorial de ningún otro.

$f_5$  **NO es biyectiva** porque no es sobreyectiva.

(f)  $f_6 : \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \mapsto \frac{2x-4}{x-3}$ .

Para cada  $y \in \mathbb{R}$ , vemos cuando existe un  $x$  tal que  $f_6(x) = y$ , es decir, cuando tiene solución la ecuación:

$$y = \frac{2x-4}{x-3}$$

Despejando  $x$  obtenemos  $x = \frac{3y-4}{y-2}$ . Vemos que esta expresión tiene sentido excepto cuando el denominador se anula, es decir, cuando  $y = 2$ . Por tanto: **Conjunto imagen** =  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

$f_6$  es **inyectiva**, ya que si  $f_6(x_1) = f_6(x_2)$ , o equivalentemente,  $\frac{2x_1-4}{x_1-3} = \frac{2x_2-4}{x_2-3}$ ; operando obtenemos que  $x_1 = x_2$ . (OJO: hay que suponer  $x_1, x_2 \neq 3$  para que las expresiones tengan sentido).

$f_6$  es **sobreyectiva**, ya que dado  $y \in \mathbb{R}$ , existe un  $x$  tal que  $f_6(x) = y$ . Para ello estudiamos cuando tiene solución la ecuación:

$$y = \frac{2x-4}{x-3}$$

Despejando  $x$  obtenemos  $x = \frac{3y-4}{y-2}$ . Vemos que esta expresión tiene sentido excepto cuando el denominador se anula, es decir, cuando  $y = 2$ . Por tanto: **Conjunto imagen** =  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

$f_6$  es **biyectiva**, porque es inyectiva y sobreyectiva. La aplicación inversa la hemos obtenido antes, cuando probábamos la sobreyectividad:

$$f_6^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{5\}, x \mapsto \frac{3x - 4}{x - 2}$$

(h)  $f_8 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$ .

$f_8$  es **sobreyectiva**. Para comprobar esto, hay que ver si cualquier par de números reales  $(d, s)$  son diferencia y suma respectivamente de otros dos. Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - y &= d \\ x + y &= s \end{aligned}$$

Resolviéndolo vemos que  $x = \frac{d + s}{2}$  e  $y = \frac{s - d}{2}$ . Y por tanto siempre existen  $(x, y)$  con  $f_8(x, y) = (d, s)$ . Vemos además que el para  $(d, s)$  es imagen de un único elemento.

$f_8$  es **inyectiva**. Veámoslo. Supongamos  $f_8(x_1, y_1) = f_8(x_2, y_2)$ ; queremos que ver entonces  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ . Llamamos  $(d, s)$  a la imagen. Antes vimos que fijado  $(d, s)$  obteníamos de manera única el elemento del cual es imagen, es decir:  $x_1 = \frac{d + s}{2} = x_2$  e  $y_1 = \frac{s - d}{2} = y_2$ . Por tanto tenemos la inyectividad.

$f_8$  es **biyectiva** porque es inyectiva y sobreyectiva. La aplicación inversa la hemos calculado antes:

$$f_8^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \left( \frac{x + y}{2}, \frac{y - x}{2} \right)$$

(i)  $f_9 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 1/x)$ .

$f_9$  es **inyectiva**. Es bastante claro porque en la primera componente la aplicación es la identidad. Es decir, si  $f_9(x_1) = f_9(x_2)$ , entonces  $(x_1, 1/x_1) = (x_2, 1/x_2)$  y por tanto  $x_1 = x_2$ .

$f_9$  **NO es sobreyectiva**, porque el conjunto imagen es diferente del conjunto final. En particular, no hay ningún elemento  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que su imagen sea  $(0, 0)$  ya que  $f(x) = (x, 1/x)$  y  $1/x$  nunca es nulo.

$f_9$  **NO es biyectiva**, porque no es sobreyectiva.

---

7.— Sean  $A, B, C, D$  conjuntos,  $f$  una aplicación de  $A$  en  $B$ ,  $g$  una aplicación de  $B$  en  $C$ ,  $h$  una aplicación de  $C$  en  $D$ . Probar que si  $g \circ f$  y  $h \circ g$  son biyectivas, entonces de hecho  $f, g$  y  $h$  son biyectivas.

Tenemos las aplicaciones:



$$\begin{aligned} f &: A \longrightarrow B \\ g &: B \longrightarrow C \\ h &: C \longrightarrow D \end{aligned}$$

Y consideramos las composiciones:

$$\begin{aligned} g \circ f &: A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \\ h \circ g &: B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \end{aligned}$$

Supongamos que son biyectivas, es decir, inyectivas y sobreyectivas.

Por las propiedades de la composición con respecto a la sobreyectividad e inyectividad, sabemos que:

$$\begin{aligned} g \circ f \text{ inyectiva} &\Rightarrow f \text{ inyectiva} \\ h \circ g \text{ inyectiva} &\Rightarrow g \text{ inyectiva} \end{aligned}$$

y también:

$$\begin{aligned} g \circ f \text{ sobreyectiva} &\Rightarrow g \text{ sobreyectiva} \\ h \circ g \text{ sobreyectiva} &\Rightarrow h \text{ sobreyectiva} \end{aligned}$$

Vemos que  $g$  es inyectiva y sobreyectiva, y por tanto es biyectiva.

Ahora recordemos que si  $g$  es biyectiva,  $g^{-1}$  es biyectiva y además:

$$\begin{aligned} g^{-1} \circ g &= id_B \\ g \circ g^{-1} &= id_C \end{aligned}$$

Como la composición de aplicaciones biyectivas es biyectiva, obtenemos la biyectividad de  $f$  y de  $h$ :

$$\begin{aligned} g^{-1} \circ (g \circ f) &= (g^{-1} \circ g) \circ f = id_B \circ f = f \\ (h \circ g) \circ g^{-1} &= h \circ (g \circ g^{-1}) = h \circ id_C = h \end{aligned}$$

**9.-** Sea  $f : A \rightarrow B$  una aplicación. Demostrar que

- (a)  $f$  es inyectiva si y sólo si existe una aplicación  $g : B \rightarrow A$  tal que  $g \circ f = i_A$ .  
 (b)  $f$  es sobreyectiva si y sólo si existe una aplicación  $h : B \rightarrow A$  tal que  $f \circ h = i_B$ .

(a) **Veamos que:  $f$  inyectiva  $\Rightarrow \exists g : B \rightarrow A / g \circ f = i_A$**

Se trata de definir una aplicación  $g$  de  $B$  en  $A$  que, sobre elementos de la forma  $f(x)$  nos permita recuperar  $x$ . Sobre elementos que no sean de la forma  $f(x)$  nos da igual como funcione. Podemos por ejemplo "enviarlos" sobre un elemento fijo  $a_0$  cualquiera de  $A$ . Definimos por tanto:

$$g(y) = \begin{cases} x, & \text{si } y = f(x) \text{ para algún } x \in A; \\ a_0, & \text{si } y \neq f(x) \text{ para todo } x \in A. \end{cases}$$

Primero hay que ver que es efectivamente una aplicación, es decir, que está definida de manera unívoca. Podría ocurrir que  $y = f(x_1)$  pero también  $y = f(x_2)$  con  $x_1, x_2 \in A$ . Pero **por ser inyectiva** si  $f(x_1) = f(x_2)$ , entonces  $x_1 = x_2$ , luego está bien definida.

Es claro además por construcción que:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$$

y así  $g \circ f = id_A$ .

**Veamos el recíproco:**  $\exists g : B \rightarrow A / g \circ f = i_A \Rightarrow f$  **inyectiva**

Simplemente tenemos en cuenta que  $i_A$  es biyectiva y en particular inyectiva. Por tanto si  $g \circ f = i_A$ , entonces  $f$  es inyectiva.

(b) **Veamos que:**  $f$  **sobreyectiva**  $\Rightarrow \exists h : B \rightarrow A / f \circ h = i_B$

Ahora por ser  $f$  sobreyectiva, dado  $y \in B$  siempre podemos **elegir un** elemento  $x$  que verifica  $f(x) = y$ . Llamamos a este elemento  $h(y)$  y tenemos definida una aplicación  $h : B \rightarrow A$ . Es importante darse cuenta de que si  $f$  no es inyectiva no hay un único elemento que cumpla  $f(x) = y$ ; ELIGIENDO UNO para cada  $y \in B$ ,  $h$  está definida de manera unívoca.

Por la propia construcción de  $h$  se cumple que, dado  $y \in B$ :

$$(f \circ h)(y) = f(h(y)) = y$$

y así  $f \circ h = id_B$ .

**Veamos el recíproco:**  $\exists h : B \rightarrow A / f \circ h = i_B \Rightarrow f$  **sobreyectiva**

Simplemente tenemos en cuenta que  $i_B$  es biyectiva y en particular sobreyectiva. Por tanto si  $f \circ h = i_B$ , entonces  $f$  es sobreyectiva.

---

**10.**— Sean  $X$  e  $Y$  conjuntos y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a)  $f$  es inyectiva.

(b) Para cualesquiera subconjuntos  $A, B$  de  $X$  tales que  $A \cap B = \emptyset$ , se cumple  $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ .

- Supongamos primero que  $f$  es inyectiva. Veamos que se cumple la condición (b). Sean  $A, B$  subconjuntos de  $X$  tales que  $A \cap B = \emptyset$ . Si la condición no fuese cierta, entonces  $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$ , es decir, existiría  $y \in f(A) \cap f(B)$ . Por tanto  $y = f(a) = f(b)$  para algún  $a \in A$  y  $b \in B$ . Pero por ser inyectiva si  $f(a) = f(b)$  entonces  $a = b$  y  $A \cap B \neq \emptyset$ , con lo cual llegaríamos a una contradicción.

- Supongamos ahora que cumple la condición (b). Veamos que  $f$  es inyectiva. Sean  $a, b \in X$ ; queremos ver que si  $a \neq b$  entonces  $f(a) \neq f(b)$ . Pero si  $a \neq b$  entonces tomamos los subconjuntos de  $X$ ,  $A = \{a\}$  y  $B = \{b\}$  y se verifica que  $A \cap B = \emptyset$ . Entonces por la condición (b),  $f(A) \cap f(B) = \emptyset$  lo que significa que  $a$  y  $b$  tienen distinta imagen por  $f$ .

**(Primer parcial, febrero 2003)**

---