ÁLGEBRA LINEAL I — Ejercicios Tema IV. Capítulo 4

Endomorfismos. (Curso 2023–2024)

1.– Escribe la matriz asociada F_C al endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y)$ respecto de la base canónica.

2.– Comprueba que para el endomorfismo f del ejercicio anterior $f(2, -1) = 0 \cdot (2, -1)$ y $f(1, 2) = 5 \cdot (1, 2)$.

3.– Calcula la matriz F_B asociada a f respecto de la base $B = \{(2, -1), (1, 2)\}$. Comprueba es es diagonal.

4.– Calcula el polinomio característico del endomorfismo f del problema 1. ¿Cúales son sus raíces?.

5.– Factoriza los siguientes polinomios en $\mathbb{R}$ sabiendo que al menos una de sus raíces reales es entera:

(i) $x^2 - 5x + 6$.

(ii) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

(iii) $x^3 + x^2 - 3x - 3$.

(iv) $x^4 + x^3 - x^2 - x$.

(v) $x^3 - x^2 + x - 1$.

6.– Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$:

(i) Calcular su polinomio característico.

(ii) Calcular sus autovalores indicando su multiplicidad algebraica.

(iii) Calcular la multiplicidad geométrica de sus autovalores.

(iv) Calcular una base de autovectores asociada a cada autovalor.

(v) Calcular el producto de la matriz A por los autovectores anteriores. ¿Qué observas?.

(vi) Toma D la matriz diagonal formada por los autovalores repetidos tantas veces como indica su multiplicidad; P la matriz formada por los autovectores en columna en un orden coherente con el elegido para los autovectores. Comprueba que $AP = PD$. Nota que esto equivale a $P^{-1}AP = D$.

Soluciones.

1. $F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $F_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

4. $P_f(\lambda) = \lambda(\lambda - 5) = \lambda^2 - 5\lambda$. Sus raíces son 0 y 5.

5.

(i) $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

(ii) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$.

(iii) $x^3 + x^2 - 3x - 3 = (x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

(iv) $x^4 + x^3 - x^2 - x = x(x-1)(x+1)^2$.

(v) $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$.

6.

(i) $p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda-2)(\lambda-5)$.

(ii) $\lambda_1 = 0$ con $m.algebraica = 2$; $\lambda_2 = 2$ con $m.algebraica = 1$; $\lambda_3 = 5$ con $m.algebraica = 1$.

(iii) m.geométrica(0) = 2, m.geométrica(2) =m.geométrica(5) = 1.

(iv)(*) $S_0 = \mathcal{L}\{(2,-2,0,1),(1,-1,1,0)\}$, $S_2 = \mathcal{L}\{(-3,-3,1,5)\}$, $S_5 = \mathcal{L}\{(0,0,1,2)\}$.

(v) $A\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$A\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Se observa que la imagen de cada autovector es el mismo vector multiplicado por su autovalor asociado.

(vi)(*) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

(*) La solución no es única, es decir, puede haber otras respuestas diferentes correctas.