

1.— Escribe la matriz asociada  $F_C$  al endomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y)$  respecto de la base canónica.

\_\_\_\_\_

2.— Comprueba que para el endomorfismo  $f$  del ejercicio anterior  $f(2, -1) = 0 \cdot (2, -1)$  y  $f(1, 2) = 5 \cdot (1, 2)$ .

\_\_\_\_\_

3.— Calcula la matriz  $F_B$  asociada a  $f$  respecto de la base  $B = \{(2, -1), (1, 2)\}$ . Comprueba que es diagonal.

\_\_\_\_\_

4.— Calcula el polinomio característico del endomorfismo  $f$  del problema 1. ¿Cuáles son sus raíces?

\_\_\_\_\_

5.— Factoriza los siguientes polinomios en  $\mathbb{R}$  sabiendo que al menos una de sus raíces reales es entera:

(i)  $x^2 - 5x + 6$ .

(ii)  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ .

(iii)  $x^3 + x^2 - 3x - 3$ .

(iv)  $x^4 + x^3 - x^2 - x$ .

(v)  $x^3 - x^2 + x - 1$ .

\_\_\_\_\_

6.— Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ :

(i) Calcular su polinomio característico.

(ii) Calcular sus autovalores indicando su multiplicidad algebraica.

(iii) Calcular la multiplicidad geométrica de sus autovalores.

(iv) Calcular una base de autovectores asociada a cada autovalor.

(v) Calcular el producto de la matriz  $A$  por los autovectores anteriores. ¿Qué observas?

(vi) Toma  $D$  la matriz diagonal formada por los autovalores repetidos tantas veces como indica su multiplicidad;  $P$  la matriz formada por los autovectores en columna en un orden coherente con el elegido para los autovectores. Comprueba que  $AP = PD$ . Nota que esto equivale a  $P^{-1}AP = D$ .

\_\_\_\_\_

---

Soluciones.

---

1.  $F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

3.  $F_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

4.  $P_f(\lambda) = \lambda(\lambda - 5) = \lambda^2 - 5\lambda$ . Sus raíces son 0 y 5.

5.

(i)  $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ .

(ii)  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$ .

(iii)  $x^3 + x^2 - 3x - 3 = (x + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ .

(iv)  $x^4 + x^3 - x^2 - x = x(x - 1)(x + 1)^2$ .

(v)  $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$ .

6.

(i)  $p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda - 5)$ .

(ii)  $\lambda_1 = 0$  con  $m.algebraica = 2$ ;  $\lambda_2 = 2$  con  $m.algebraica = 1$ ;  $\lambda_3 = 5$  con  $m.algebraica = 1$ .

(iii)  $m.geométrica(0) = 2$ ,  $m.geométrica(2) = m.geométrica(5) = 1$ .

(iv)<sup>(\*)</sup>  $S_0 = \mathcal{L}\{(2, -2, 0, 1), (1, -1, 1, 0)\}$ ,  $S_2 = \mathcal{L}\{(-3, -3, 1, 5)\}$ ,  $S_5 = \mathcal{L}\{(0, 0, 1, 2)\}$ .

(v)  $A \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

$A \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Se observa que la imagen de cada autovector es el mismo vector multiplicado por su autovalor asociado.

(vi)<sup>(\*)</sup>  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  y  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ .

---

(\*) La solución no es única, es decir, puede haber otras respuestas diferentes correctas.