

1.— Escribe la matriz asociada F_C al endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y)$ respecto de la base canónica.

2.— Comprueba que para el endomorfismo f del ejercicio anterior $f(2, -1) = 0 \cdot (2, -1)$ y $f(1, 2) = 5 \cdot (1, 2)$.

3.— Calcula la matriz F_B asociada a f respecto de la base $B = \{(2, -1), (1, 2)\}$. Comprueba que es diagonal.

4.— Calcula el polinomio característico del endomorfismo f del problema 1. ¿Cuáles son sus raíces?.

5.— Factoriza los siguientes polinomios en $\mathbb{R}$ sabiendo al menos una de sus raíces reales es entera:

(i) $x^2 - 5x + 6$.

(ii) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

(iii) $x^3 + x^2 - 3x - 3$.

(iv) $x^4 + x^3 - x^2 - x$.

(v) $x^3 - x^2 + x - 1$.

6.— Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$:

(i) Calcular su polinomio característico.

(ii) Calcular sus autovalores indicando su multiplicidad algebraica.

(iii) Calcular la multiplicidad geométrica de sus autovalores.

(iv) Calcular una base de autovectores asociada a cada autovalor.

(v) Calcular el producto de la matriz A por los autovectores anteriores. ¿Qué observas?.

(vi) Toma D la matriz diagonal formada por los autovalores repetidos tantas veces como indica su multiplicidad; P la matriz formada por los autovectores en columna en un orden coherente con el elegido para los autovectores. Comprueba que $AP = PD$. Nota que esto equivale a $P^{-1}AP = D$.

Soluciones.

1. $F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $F_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

4. $P_f(\lambda) = \lambda(\lambda - 5) = \lambda^2 - 5\lambda$. Sus raíces son 0 y 5.

5.

(i) $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

(ii) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$.

(iii) $x^3 + x^2 - 3x - 3 = (x + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

(iv) $x^4 + x^3 - x^2 - x = x(x - 1)(x + 1)^2$.

(v) $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$.

6.

(i) $p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda - 5)$.

(ii) $\lambda_1 = 0$ con $m.algebraica = 2$; $\lambda_2 = 2$ con $m.algebraica = 1$; $\lambda_3 = 5$ con $m.algebraica = 1$.

(iii) $m.geométrica(0) = 2$, $m.geométrica(2) = m.geométrica(5) = 1$.

(iv)^(*) $S_0 = \mathcal{L}\{(2, -2, 0, 1), (1, -1, 1, 0)\}$, $S_2 = \mathcal{L}\{(-3, -3, 1, 5)\}$, $S_5 = \mathcal{L}\{(0, 0, 1, 2)\}$.

$$\begin{aligned} \text{(v)} \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ A \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, & A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se observa que la imagen de cada autovector es el mismo vector multiplicado por su autovalor asociado.

$$\text{(vi)^(*) } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

(*) La solución no es única, es decir, puede haber otras respuestas diferentes correctas.