1.– Dada la función f definida como:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 2y, x - y)$$

comprueba que es una aplicación lineal, verificando la identidad:

$$f(a(x, y) + b(x', y')) = af(x, y) + bf(x', y')$$

para cualesquiera a, b, x, y, x', y'.

2.– Dada la función f definida como:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 2y, 2)$$

comprueba que NO es una aplicación lineal, encontrando un vector (x, y) y un número a tales que $f(a(x, y)) \neq af(x, y)$.

3.– Sea una aplicación lineal $f : U \longrightarrow V$, $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de U y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de V. Si $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$ y $f(\vec{u}_2) = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_3$ escribir la matriz $F_{B_2B_1}$ asociada a f con respecto a la base B_1 de U y a la base B_2 de V.

4.– ¿Cuál es la imagen del vector $\vec{w} = 5\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$ por la aplicación del problema anterior?.

5.– En las condiciones del problema 3 consideramos las nuevas bases $B_1' = \{\vec{u}_1', \vec{u}_2'\}$ y $B_2' = \{\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3'\}$, con:

$$\vec{u}_1' = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_2' = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$$
$$\vec{v}_1' = \vec{v}_2, \quad \vec{v}_2' = \vec{v}_3, \quad \vec{v}_3' = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

Hallar la matriz $F_{B_2'B_1'}$ respecto a la base B_1' de U y B_2' de V.

6.– Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y, 3x + z)$ hallar las ecuaciones implícitas del núcleo y una base de la imagen.

7.– Dadas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $h = g \circ f$, definidas como $f(x, y) = (x + y, 2x + y)$, $g(x, y) = (3x - y, x - y)$, hallas las matrices asociadas a f, g y h respecto de la base canónica C de $\mathbb{R}^2$.

Soluciones.

2$^{(*)}$. $(x, y) = (0, 0)$ y $a = 0$. $f(0 \cdot (0, 0)) = (0, 2)$ pero $0 \cdot f(0, 0) = (0, 0)$.

3. $F_{B_2B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $f(\vec{w}) = -\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 - 8\vec{v}_3$.

5. $F_{B'_2 B'_1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

6$^{(*)}$**.** $ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0, 2x-y=0\}$ e $Im(f) = \mathcal{L}\{(1,2,3),(1,-1,0)\}$.

7. $F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad G_C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad H_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$^{(*)}$ La solución no es única, es decir, puede haber otras respuestas diferentes correctas.