1.– Dada la función f definida como:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x+2y, x-y)$$

comprueba que es una aplicación lineal, verificando la identidad:

$$f(a(x,y) + b(x',y')) = af(x,y) + bf(x',y')$$

para cualesquiera a, b, x, y, x', y'.

2.– Dada la función f definida como:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x+2y, 2)$$

comprueba que NO es una aplicación lineal, encontrando un vector (x,y) y un número a tales que $f(a(x,y)) \neq af(x,y)$.

3.– Sea una aplicación lineal $f : U \longrightarrow V$, $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de U y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de V. Si $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$ y $f(\vec{u}_2) = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_3$ escribir la matriz $F_{B_2B_1}$ asociada a f con respecto a la base B_1 de U y a la base B_2 de V.

4.– ¿Cuál es la imagen del vector $\vec{w} = 5\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$ por la aplicación del problema anterior?.

5.– En las condiciones del problema 3 consideramos las nuevas bases $B_1' = \{\vec{u}_1', \vec{u}_2'\}$ y $B_2' = \{\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3'\}$, con:

$$\vec{u}_1' = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_2' = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$$
$$\vec{v}_1' = \vec{v}_2, \quad \vec{v}_2' = \vec{v}_3, \quad \vec{v}_3' = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

Hallar la matriz $F_{B_2'B_1'}$ respecto a la base B_1' de U y B_2' de V.

6.– Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $f(x,y,z) = (x+y+z, 2x-y, 3x+z)$ hallar las ecuaciones implícitas del núcleo y una base de la imagen.

7.– Dadas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $h = g \circ f$, definidas como $f(x,y) = (x+y, 2x+y)$, $g(x,y) = (3x-y, x-y)$, hallas las matrices asociadas a f, g y h respecto de la base canónica C de $\mathbb{R}^2$.

Soluciones.

2$^{(*)}$. $(x,y) = (0,0)$ y $a = 0$. $f(0 \cdot (0,0)) = (0,2)$ pero $0 \cdot f(0,0) = (0,0)$.

3. $F_{B_2B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $f(\vec{w}) = -\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 - 8\vec{v}_3$.

5. $F_{B'_2 B'_1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

6$^{(*)}$**.** $ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0, 2x - y = 0\}$ e $Im(f) = \mathcal{L}\{(1, 2, 3), (1, -1, 0)\}$.

7. $F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad G_C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad H_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$^{(*)}$ La solución no es única, es decir, puede haber otras respuestas diferentes correctas.