

1.— Dada la función f definida como:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 2y, x - y)$$

comprueba que es una aplicación lineal, verificando la identidad:

$$f(a(x, y) + b(x', y')) = af(x, y) + bf(x', y')$$

para cualesquiera a, b, x, y, x', y' .

2.— Dada la función f definida como:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 2y, 2)$$

comprueba que NO es una aplicación lineal, encontrando un vector (x, y) y un número a tales que $f(a(x, y)) \neq af(x, y)$.

3.— Sea una aplicación lineal $f : U \longrightarrow V$, $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de U y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de V . Si $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$ y $f(\vec{u}_2) = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_3$ escribir la matriz $F_{B_2 B_1}$ asociada a f con respecto a la base B_1 de U y a la base B_2 de V .

4.— ¿Cuál es la imagen del vector $\vec{w} = 5\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$ por la aplicación del problema anterior?

5.— En las condiciones del problema 3 consideramos las nuevas bases $B'_1 = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2\}$ y $B'_2 = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3\}$, con:

$$\begin{aligned} \vec{u}'_1 &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2, & \vec{u}'_2 &= \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 \\ \vec{v}'_1 &= \vec{v}_2, & \vec{v}'_2 &= \vec{v}_3, & \vec{v}'_3 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \end{aligned}$$

Hallar la matriz $F_{B'_2 B'_1}$ respecto a la base B'_1 de U y B'_2 de V .

6.— Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y, 3x + z)$ hallar las ecuaciones implícitas del núcleo y una base de la imagen.

7.— Dadas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $h = g \circ f$, definidas como $f(x, y) = (x + y, 2x + y)$, $g(x, y) = (3x - y, x - y)$, hallas las matrices asociadas a f, g y h respecto de la base canónica C de \mathbb{R}^2 .

Soluciones.

2^(*). $(x, y) = (0, 0)$ y $a = 0$. $f(0 \cdot (0, 0)) = (0, 2)$ pero $0 \cdot f(0, 0) = (0, 0)$.

3. $F_{B_2 B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

4. $f(\vec{w}) = -\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 - 8\vec{v}_3.$

5. $F_{B'_2B'_1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$

6^(*). $\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0, 2x - y = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \mathcal{L}\{(1, 2, 3), (1, -1, 0)\}.$

7. $F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

^(*) La solución no es única, es decir, puede haber otras respuestas diferentes correctas.