

- 1.— Sea $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}) = \{p(x) = a_0 + a_1x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual que 1. Definimos la operación suma de polinomios:

$$p(x) = a_0 + a_1x, \quad q(x) = b_0 + b_1x \Rightarrow p(x) + q(x) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x$$

Tomando $p(x) = a_0 + a_1x$, $q(x) = b_0 + b_1x$, $r(x) = c_0 + c_1x$ arbitrarios, comprobar que cumple las propiedades:

- asociativa, es decir, que $p(x) + (q(x) + r(x)) = (p(x) + q(x)) + r(x)$.
- conmutativa, es decir, que $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$.
- elemento neutro, es decir, existe el polinomio constante igual a 0, $p_0(x) = 0$ verificando que $p(x) + p_0(x) = p(x)$.
- elemento opuesto, es decir, dado $p(x) = a_0 + a_1x$ comprobar que el polinomio $-p(x) = -a_0 - a_1x$ cumple que $p(x) + (-p(x)) = 0$.

- 2.— En $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ definimos ahora la operación producto por un escalar:

$$p(x) = a_0 + a_1x, \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot p(x) := \lambda a_0 + \lambda a_1x.$$

Tomando $p(x) = a_0 + a_1x$, $q(x) = b_0 + b_1x$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ arbitrarios, comprobar que cumple las propiedades:

- $1 \cdot p(x) = p(x)$.
- $\mu(\lambda \cdot p(x)) = (\mu\lambda) \cdot p(x)$.
- $\lambda \cdot (p(x) + q(x)) = \lambda \cdot p(x) + \lambda \cdot q(x)$.
- $(\lambda + \mu) \cdot p(x) = \lambda \cdot p(x) + \mu \cdot p(x)$.

- 3.— Comprobar que el subconjunto de polinomios $U = \{a_0 + a_1x \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \mid a_0 + a_1 = 1\}$ NO es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, dando un vector $p(x) \in U$ y un número λ tal que $\lambda \cdot p(x) \notin U$.

- 4.— Comprobar que el subconjunto de polinomios $U = \{a_0 + a_1x \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \mid a_0 + a_1 = 0\}$ SI es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Para ello dados $p(x) = a_0 + a_1x$, $q(x) = b_0 + b_1x$ tales que $p(x), q(x) \in U$, es decir, tales que $a_0 + a_1 = 0$ y $b_0 + b_1 = 0$ verificar que $\lambda \cdot p(x) + \mu \cdot q(x) \in U$ para cualesquiera números $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- 5.— Estudiar por definición si los vectores $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$ son linealmente independientes.

- 6.— Escribir el vector $(2, 3)$ como combinación lineal de los vectores $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$. ¿Hay una única forma de hacerlo?.

- 7.— Escribir el vector $(2, 3)$ como combinación lineal de los vectores $(0, 1)$ y $(1, 1)$. ¿Hay una única forma de hacerlo?.

- 8.— Si $(4, 3)_B$ son las coordenadas de un vector en la base $B = \{(1, 1), (2, -1)\}$. ¿Cuáles son las componentes de ese vector como elemento de \mathbb{R}^2 .

- 9.— Dados los vectores $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ encontrar un tercer vector \vec{u} tales que $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), \vec{u}\}$ sean una base de \mathbb{R}^3 .
-
- 10.— Escribir la base canónica de $\mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.
-
- 11.— Dada la base $B = \{(1, 1), (2, 3)\}$ de \mathbb{R}^2 escribir la matriz de cambio de base M_{CB} , siendo C la base canónica.
-
- 12.— En un espacio vectorial V se tienen las bases $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.
- (i) Si $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ y $\vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ escribir las matrices de cambio de base $M_{B_1B_2}$ y $M_{B_2B_1}$.
- (ii) Si $\vec{w} = (-1, 3)_{B_2}$ escribir el vector \vec{w} en función de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .
- (iii) Escribir las coordenadas de \vec{w} en la base B_1 .
-
- 13.— En \mathbb{R}^3 dado el subespacio vectorial $U = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ escribir sus ecuaciones paramétricas e implícitas en la base canónica.
-
- 14.— En \mathbb{R}^3 dado el subespacio vectorial $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$ escribir sus ecuaciones paramétricas e implícitas en la base canónica.
-

Soluciones.

3^(*). $p(x) = 1$, $\lambda = 2$.

5. No son linealmente independientes: $2 \cdot (1, 0, 1) - 1 \cdot (2, 1, 1) + 1 \cdot (0, 1, -1) = (0, 0, 0)$.

6^(*). $(2, 3) = 1 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 1)$. La solución NO es única.

7. $(2, 3) = 1 \cdot (0, 1) + 2 \cdot (1, 1)$. La solución es única.

8. $(10, 1)$.

9^(*). $(0, 0, 1)$.

10. $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

11. $M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

12. (i) $M_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $M_{B_2B_1} = M_{B_1B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. (ii) $\vec{w} = -\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$. (iii) $\vec{w} = (5, 8)_{B_1}$.

13^(*). Paramétricas: $x = a + b$, $y = b$, $z = a + b$. Implícitas: $x - z = 0$.

14^(*). Paramétricas: $x = 2a + b$, $y = -b$, $z = a$. Implícitas: $x + y - 2z = 0$.

(*) La solución no es única, es decir, puede haber otras respuestas diferentes correctas.