ÁLGEBRA LINEAL I — Ejercicios Tema III. Capítulos 1 y 2

Espacios vectoriales. (Curso 2020–2021)

1.– Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{p(x) = a_0 + a_1x | a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual que 1. Definimos la operación suma de polinomios:

$$p(x) = a_0 + a_1x, \quad q(x) = b_0 + b_1x \Rightarrow p(x) + q(x) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x$$

Tomando $p(x) = a_0 + a_1x$, $q(x) = b_0 + b_1x$, $r(x) = c_0 + c_1x$ arbitrarios, comprobar que cumple las propiedaes:

- asociativa, es decir, que $p(x) + (q(x) + r(x)) = (p(x) + q(x)) + r(x)$.

- conmutativa, es decir, que $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$.

- elemento neutro, es decir, existe el polinomio constante igual a 0, $p_0(x) = 0$ verificando que $p(x) + p_0(x) = p(x)$.

- elemento opuesto, es decir, dado $p(x) = a_0 + a_1x$ comprobar que el polinomio $-p(x) = -a_0 - a_1x$ cumple que $p(x) + (-p(x)) = 0$.

2.– En $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definimos ahora la operación producto por un escalar:

$$p(x) = a_0 + a_1x, \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot p(x) := \lambda a_0 + \lambda a_1 x.$$

Tomando $p(x) = a_0+a_1x$, $q(x) = b_0+b_1x$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ arbitrarios, comprobar que cumple las propiedaes:

- $1 \cdot p(x) = p(x)$.

- $\mu(\lambda \cdot p(x)) = (\mu\lambda) \cdot p(x)$.

- $\lambda \cdot (p(x) + q(x)) = \lambda \cdot p(x) + \lambda \cdot q(x)$.

- $(\lambda + \mu)\cdot (x) = \lambda \cdot p(x) + \mu \cdot p(x)$.

3.– Comprobar que el subconjunto de polinomios $U = \{a_0+a_1x \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | a_0+a_1 = 1\}$ NO es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, dando un vector $p(x) \in U$ y un número λ tal que $\lambda \cdot p(x) \notin U$.

4.– Comprobar que el subconjunto de polinomios $U = \{a_0 + a_1x \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | a_0 + a_1 = 0\}$ SI es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Para ello dados $p(x) = a_0 + a_1x$, $q(x) = b_0 + b_1x$ tales que $p(x), q(x) \in U$, es decir, tales que $a_0 + a_1 = 0$ y $b_0 + b_1 = 0$ verificar que $\lambda \cdot p(x) + \mu \cdot q(x) \in V$ para cualesquiera números $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

5.– Estudiar por definición si los vectores $(1, 0, 1), (2, 1, 1), (0, 1, -1)$ son linealmente independientes.

6.– Escribir el vector $(2, 3)$ como combinación lineal de los vectores $(1, 0), (0, 1)$ y $(1, 1)$. ¿Hay una única forma de hacerlo?.

7.– Escribir el vector $(2, 3)$ como combinación lineal de los vectores $(0, 1)$ y $(1, 1)$. ¿Hay una única forma de hacerlo?.

8.– Si $(4, 3)_B$ son las coordenadas de un vector en la base $B = \{(1, 1), (2, -1)\}$. ¿Cuáles son las componentes de ese vector como elemento de $\mathbb{R}^2$.

9.– Dados los vectores $(1,0,0),(1,1,0)$ encontrar un tercer vector $\vec{u}$ tales que $\{(1,0,0),(1,1,0),\vec{u}\}$ sean una base de $\mathbb{R}^3$.

10.– Escribir la base canónica de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

11.– Dada la base $B=\{(1,1),(2,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$ escribir la matriz de cambio de base M_{CB}, siendo C la base canónica.

12.– En un espacio vectorial V se tienen las bases $B_1=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ y $B_2=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$.

(i) Si $\vec{v}_1=\vec{u}_1+\vec{u}_2$ y $\vec{v}_2=2\vec{u}_1+3\vec{u}_2$ escribir las matrices de cambio de base $M_{B_1B_2}$ y $M_{B_2B_1}$.

(ii) Si $\vec{w}=(-1,3)_{B_2}$ escribir el vector $\vec{w}$ en función de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

(iii) Escribir las coordenadas de $\vec{w}$ en la base B_1.

13.– En $\mathbb{R}^3$ dado el subespacio vectorial $U=\{(1,0,1),(1,1,1)\}$ escribir sus ecuaciones paramétricas e implícitas en la base canónica.

14.– En $\mathbb{R}^3$ dado el subespacio vectorial $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y-2z=0\}$ escribir sus ecuaciones paramétricas e implícitas en la base canónica.

Soluciones.

3$^{(*)}$**.** $p(x)=1$, $\lambda=2$.

5. No son linealmente independientes: $2\cdot(1,0,1)-1\cdot(2,1,1)+1\cdot(0,1,-1)=(0,0,0)$.

6$^{(*)}$**.** $(2,3)=1\cdot(1,0)+2\cdot(0,1)+1\cdot(1,1)$. La solución NO es única.

7. $(2,3)=1\cdot(0,1)+2\cdot(1,1)$. La solución es única.

8. $(10,1)$.

9$^{(*)}$**.** $(0,0,1)$.

10. $C=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}.$

11. $M_{CB}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}.$

12. (i) $M_{B_1B_2}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$ y $M_{B_2B_1}=M^{-1}_{B_1B_2}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$. (ii) $\vec{w}=-\vec{v}_1+3\vec{v}_2$. (iii) $\vec{w}=(5,8)_{B_1}$.

13$^{(*)}$**.** Paramétricas: $x=a+b,\quad y=b,\quad z=a+b$. Implícitas: $x-z=0$.

14$^{(*)}$**.** Paramétricas: $x=2a+b,\quad y=-b,\quad z=a$. Implícitas: $x+y-2z=0$.

$^{(*)}$ La solución no es única, es decir, puede haber otras respuestas diferentes correctas.