

1.− Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Si le aplicamos sucesivamente las operaciones elementales fila  $H_{32}(1)$ ,  $H_1(3)$ ,  $H_{13}$ , ¿qué matriz resulta?

2.− Escribir las matrices elementales fila  $3 \times 3$ ,  $H_{32}(1)$ ,  $H_1(3)$ ,  $H_{13}$ .

3.− Para la matriz  $A$  del problema 1 calcular los productos  $H_{32}(1)A$ ,  $H_1(3)H_{32}(1)A$  y  $H_{13}H_1(3)H_{32}(1)A$ .

4.− Hacer, para matrices  $3 \times 3$ , el producto  $H_{13}H_1(3)H_{32}(1)$ .

5.− Si le aplicamos sucesivamente a la matriz identidad  $3 \times 3$ , las operaciones elementales fila  $H_{32}(1)$ ,  $H_1(3)$ ,  $H_{13}$ , ¿qué matriz resulta?

6.− De las siguientes matrices, ¿cuáles son formas canónicas reducidas por filas y cuáles formas canónicas reducidas por columnas?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.− Hallar la forma canónica reducida por filas  $R$  de la matriz  $A$  del problema 1.

8.− Para las matrices  $A$  y  $R$  de los problemas 1 y 7 hallar la matriz de paso  $P$  tal que  $PA = R$ .

9.− Hallar la inversa de  $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  por el método de Gauss.

10.− Hallar una matriz diagonal  $D$  congruente con  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

11.− Hacer sobre la matriz identidad las mismas operaciones fila que se hicieron en el ejercicio 10 y comprobar que la matriz  $S$  obtenida cumple  $SBS^t = D$ .

12.− Escribir la matriz ampliada asociada al sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

**13.**— Resolver el sistema anterior por el método de Gauss, dando la solución en función de un parámetro.

---

---

Soluciones.

---

1.  $A \xrightarrow{H_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(3)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{13}} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

2.  $H_{32}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_1(3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3.  $H_{32}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad H_1(3)H_{32}(1)A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad H_{13}H_1(3)H_{32}(1) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

4.  $H_{13}H_1(3)H_{32}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

5.  $Id \xrightarrow{H_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(3)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{13}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

6. Son caónicas reducidas por filas  $A_2$  y  $A_4$ . Y son canónicas reducidas por columnas  $A_3$  y  $A_4$ .

7.  $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

8<sup>(\*)</sup>.  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

9.  $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$

10<sup>(\*)</sup>.  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$

11<sup>(\*)</sup>.  $Id \xrightarrow{H_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = S.$

12.  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array} \right).$

13.  $x = 2 + \lambda, \quad y = 1 - \lambda, \quad z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

---

(\*) La solución no es única, es decir, puede haber otras respuestas diferentes correctas.