ÁLGEBRA LINEAL I — Ejercicios Tema II. Capítulos 3 y 4

Equivalencia de matrices. Sistemas de ecuaciones. (Curso 2022–2023)

1.– Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Si le aplicamos sucesivamente las operaciones elementales fila $H_{32}(1)$, $H_1(3)$, H_{13}, ¿qué matriz resulta?.

2.– Escribir las matrices elementales fila 3×3, $H_{32}(1)$, $H_1(3)$, H_{13}.

3.– Para la matriz A del problema 1 calcular los productos $H_{32}(1)A$, $H_1(3)H_{32}(1)A$ y $H_{13}H_1(3)H_{32}(1)A$.

4.– Hacer, para matrices 3×3, el producto $H_{13}H_1(3)H_{32}(1)$.

5.– Si le aplicamos sucesivamente a la matriz identidad 3×3, las operaciones elementales fila $H_{32}(1)$, $H_1(3)$, H_{13}, ¿qué matriz resulta?.

6.– De las siguientes matrices, ¿cuáles son formas canónicas reducidas por filas y cuáles formas canónicas reducidas por columas?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.– Hallar la forma canónica reducida por filas R de la matriz A del problema 1.

8.– Para las matrices A y R de los problemas 1 y 7 hallar la matriz de paso P tal que $PA = R$.

9.– Hallar la inversa de $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss.

10.– Hallar una matriz diagonal D congruente con $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11.– Hacer sobre la matriz identidad las mismas operaciones fila que se hicieron en el ejercicio 10 y comprobar que la matriz S obtenida cumple $SBS^t = D$.

12.– Escribir la matriz ampliada asociada al sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

13.– Resolver el sistema anterior por el método de Gauss, dando la solución en función de un parámetro.

Soluciones.

---

1. $A \overset{H_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \overset{H_1(3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \overset{H_{13}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

2. $H_{32}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_1(3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3. $H_{32}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, H_1(3)H32(1)A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, H_{13}H_1(3)H32(1) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

4. $H_{13}H_1(3)H32(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

5. $Id \overset{H_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_1(3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{13}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

6. Son cańonicas reducidas por filas A_2 y A_4. Y son canónicas reducidas por columnas A_3 y A_4.

7. $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

8$^{(*)}$**.** $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

9. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$

10$^{(*)}$**.** $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$

11$^{(*)}$**.** $Id \overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{23}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = S.$

12. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right).$

13. $x = 2 + \lambda, \qquad y = 1 - \lambda, \qquad z = \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$

$^{(*)}$ La solución no es única, es decir, puede haber otras respuestas diferentes correctas.