ÁLGEBRA LINEAL I

Ejercicios Tema II. Capítulos 1 y 2

Matrices y determinantes.

(Curso 2022–2023)

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.– Calcular $B + D$, AC, CB, $5A$, $2B - 5AC$.

2.– Hallar B^3.

3.– Calcular A^t, B^t, C^t, D^t.

4.– Calcular $traza(B), traza(D), traza(AC), traza(CA)$.

5.– Indicar si alguna de las matrices A, B, C ó D es simétrica o hemisimétrica.

6.– Escribir B como suma de una matriz simétrica y otra hemisimétrica.

7.– Indicar si alguna de las matrices A, B, C ó D es triangular inferior, triangular superior o diagonal.

8.– Calcular $det(B), det(D), det(AC), det(CA)$.

9.– Calcular (si existen) B^{-1}, D^{-1}.

Soluciones.

1. $B + D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $CB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $2B - 5AC = \begin{pmatrix} -13 & -6 & -3 \\ -35 & -18 & -3 \\ -5 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

2. $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad D^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $traza(B) = 3, \quad traza(D) = 6, \quad traza(AC) = 8, \quad traza(CA) = 8.$

5. D es simétrica.

6. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

7. B es triangular superior.

8. $det(B) = 1, \quad det(D) = -1, \quad det(AC) = 0, \quad det(CA) = 3.$

9. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$