

1.— Se tienen 6 sobres de seis colores diferentes. Se distribuyen en ellos seis tarjetas de los mismos colores. Calcular las distintas formas de hacerlo si:

- (i) en cada uno de ellos sólo puede haber una tarjeta y solamente dos de ellas no van en el sobre de su mismo color.

Si elegimos los dos sobres que no llevan tarjetas de su propio color, necesariamente los otros cuatro se rellenarán con la tarjeta de su color y estos dos, como no pueden tener la propia, cruzarán sus tarjetas.

Por tanto el conteo se reduce a contar las formas de elegir dos sobres entre los seis distintos, sin importar el orden y sin repetirlos. Se trata de combinaciones sin repetición de 6 elementos tomados de 2 en 2:

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

- (ii) en alguno de los sobres van 4 tarjetas y las dos restantes en sobres diferentes. Da igual si van o no en el sobre de su color.

Hay 6 opciones para elegir el sobre en el que van 4 tarjetas. Una vez fijado éste, las formas de elegir los dos otros sobres donde irá una tarjeta son $C_{5,2}$.

Una vez elegidos los sobres, en el primero de ellos las formas de seleccionar las cuatro tarjetas que irán en él son $C_{6,4}$. Finalmente hay dos formas distintas de repartir las otras dos tarjetas en los dos otros sobres escogidos, una en cada uno de ellos.

En definitiva las posibilidades son:

$$6 \cdot C_{5,2} \cdot C_{6,4} \cdot 2 = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 2 = 1800$$

(1 punto)

2.— Para cada número natural $n \geq 2$ se define la matriz $n \times n$:

$$(M_n)_{ij} = i + j^2$$

- (i) Escribir M_4 y hallar su rango y determinante.

Teniendo en cuenta que i es el índice de fila y j el de columna, la matriz queda:

$$M_n = \begin{pmatrix} 1+1^2 & 1+2^2 & 1+3^2 & 1+4^2 \\ 2+1^2 & 2+2^2 & 2+3^2 & 2+4^2 \\ 3+1^2 & 3+2^2 & 3+3^2 & 3+4^2 \\ 4+1^2 & 4+2^2 & 4+3^2 & 4+4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 & 17 \\ 3 & 6 & 11 & 18 \\ 4 & 7 & 12 & 19 \\ 5 & 8 & 13 & 20 \end{pmatrix}$$

Como demostraremos en el apartado siguiente, el determinante es nulo y el rango es 2.

- (ii) Calcular $\det(M_n)$ y $\text{rango}(M_n)$ para cualquier $n \geq 2$.

En general la matriz es:

$$M_n = \begin{pmatrix} 1+1^2 & 1+2^2 & 1+3^2 & \dots & 1+n^2 \\ 2+1^2 & 2+2^2 & 2+3^2 & \dots & 2+n^2 \\ 3+1^2 & 3+2^2 & 3+3^2 & \dots & 3+n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4+1^2 & 4+2^2 & 4+3^2 & \dots & 3+n^2 \end{pmatrix}$$

Para calcular tanto el rango como el determinante usamos operaciones elementales fila que no modifican ninguno de los dos. A cada fila (excepto a la primera) le restamos la anterior. Queda:

$$\begin{pmatrix} 1+1^2 & 1+2^2 & 1+3^2 & \dots & 1+n^2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

- Si $n \geq 3$ la matriz tiene dos filas iguales (segunda y tercera) y el determinante es cero. Además de hecho todas las filas a partir de la segunda son iguales. Como las filas repetidas se pueden eliminar para el rango, éste a lo sumo puede ser dos. En las dos primeras filas y columnas tenemos el menor $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $2 - 5 = -3 \neq 0$ y por tanto $\text{rango} = 2$.

- Si $n = 2$ el determinante es $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 5 = -3$. Como es no nulo el rango es el máximo posible $\text{rango} = 2$.

(1 punto)

3.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

(i) Dar una matriz diagonal D y una matriz P inversible tal que $P^t A P = D$.

La relación $P^t A P = D$ es de congruencia. Entonces diagonalizamos la matriz simétrica A por congruencia realizando operaciones fila y exactamente las mismas en columna:

$$A \xrightarrow{H_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1/2)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1/2)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = D$$

La matriz P se obtiene realizando sobre la identidad las mismas operaciones columnas realizadas en el proceso de diagonalización:

$$Id \xrightarrow{\mu_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(-1/2)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

(ii) Dar una matriz simétrica B no diagonal y que NO sea congruente con A .

Para que NO sea congruente con A al diagonalizar B por congruencia debe de llegarse a una matriz diagonal con diferente número de signos positivos en la diagonal que la que obtuvimos antes (un positivo y dos negativos). Por ejemplo una con todos positivos, como la identidad.

Entonces basta tomar una matriz congruente con la identidad que no sea diagonal. Para ello simplemente realizamos alguna operación fila y la misma en columna en la identidad y obtendremos la matriz B :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

(1 punto)

4.— Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$:

(i) Hallar a para que A y B sean equivalentes por filas.

Dos matrices son equivalentes por filas si y sólo si su forma canónica reducida por filas es la misma (matriz escalonada, con 1s en los pivotes y ceros encima y debajo de ellos).

Escalonamos primero la matriz A mediante operaciones elementales fila:

$$A \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz B :

$$B \xrightarrow{H_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}(1)} \xrightarrow{H_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que ambas formas reducidas coinciden si y sólo si $a+1=0$, es decir, si $a=-1$.

Por tanto las matrices son equivalentes por filas si y sólo si $a=-1$.

(ii) Hallar, si existe, una matriz inversible Q tal que $AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Multiplicar por la derecha por una matriz inversible equivale a hacer operaciones elementales columna:

$$A \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}(-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para hallar la matriz Q hacemos sobre la identidad las mismas operaciones columna que en el proceso anterior:

$$Id \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}(-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.2 puntos)

5.— Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) Si $A, B \in M_{n \times n}$ son matrices no inversibles entonces $A+B$ no tiene inversa.

FALSO. Por ejemplo si tomamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son matrices no inversibles (porque tienen determinante nulo), pero sin embargo $A+B = Id$ que SI es inversible (tiene determinante no nulo).

(ii) Si $A, B \in M_{n \times n}$ son matrices no inversibles entonces $A \cdot B$ no tiene inversa.

VERDADERO. Si A, B no son inversibles su determinante es nulo. Entonces

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Y por tanto $A \cdot B$ tampoco es inversible por tener determinante nulo.

(iii) La matriz asociada a una aplicación proyección sobre un subespacio paralelamente a otro siempre es diagonalizable por semejanza.

VERDADERO. Si U y V son los subespacios suplementarios y tomamos la base

$$B = \{\underbrace{u_1, \dots, u_k}_{\in U}, \underbrace{u_{k+1}, \dots, u_n}_{\in V}\},$$

sabemos que la matriz asociada a la proyección sobre U paralelamente a V , en tal base es diagonal con k unos y el resto ceros.

Como existe una base en la cuál la aplicación proyección tiene matriz asociada diagonal, la matriz respecto de cualquier otra base es diagonalizable por semejanza.

(iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 2xy + 2y^2 = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

VERDADERO. Se tiene que la condición $x^2 + 2xy + 2y^2 = 0$ equivale a:

$$x^2 + 2xy + y^2 + y^2 = 0 \iff (x + y)^2 + y^2 = 0 \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff x = 0, \quad y = 0.$$

Por tanto:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 2xy + 2y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}$$

es subespacio porque es el subespacio vectorial trivial nulo.

(1.2 puntos)

6.— En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y dado un número real k , se consideran los subespacios:

$$U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 2), (1, 1, 1, 1), (1, 1, k, 3)\}, \quad V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - z = 0\}.$$

(i) Hallar la dimensión de U , V , $U + V$ y $U \cap V$ en función de k .

La dimensión de U es el número de generadores independientes; o equivalentemente el rango de la matriz que forman las coordenadas de sus generadores:

$$\dim(U) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 3 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+k \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } k = -1 \\ 3 & \text{si } k \neq -1 \end{cases}$$

Por otra parte V está definida por una única ecuación implícita. Su dimensión es:

$$\dim(V) = \dim(\mathbb{R}^4) - \text{número de ecuaciones} = 4 - 1 = 3.$$

Para hallar $\dim(U + V)$ a partir de la implícita de V pasamos a sus paramétricas y de ahí a los generadores:

$$x + y - z = 0 \iff z = x + y \iff \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = a + b \\ t = c \end{cases}$$

Por tanto $V = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Entonces $U + V = \mathcal{L}\{\underbrace{(1, 1, 0, 2), (0, 0, 1, -1), (0, 0, 0, 1+k)}_U, \underbrace{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)}_V\}$ y

reordenando:

$$\dim(U + V) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+k \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4.$$

(el rango es 4 porque las cuatro primeras filas ya están escalonadas y dado que sólo hay cuatro columnas nunca podría ser mayor).

Finalmente para la intersección usamos la fórmula de las dimensiones:

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V)$$

Se concluye que:

- Si $k = -1$, $\dim(U) = 2$, $\dim(V) = 3$, $\dim(U + V) = 4$, $\dim(U \cap V) = 2 + 3 - 4 = 1$.

- Si $k = 1$, $\dim(U) = 2$, $\dim(V) = 3$, $\dim(U + V) = 4$, $\dim(U \cap V) = 2 + 3 - 4 = 1$.

- (ii) Para $k = -1$, hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap V$ en la base canónica y en la base $B = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$.

Comenzamos trabajando en la base canónica. Combinaremos las implícitas de U y V para obtener las implícitas de la intersección.

Para $k = -1$ vimos que $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 2), (0, 0, 1, -1)\}$. Las paramétricas son:

$$x = a, \quad y = a, \quad z = b, \quad t = 2a - b.$$

Eliminando parámetros las implícitas quedan:

$$x - y = 0, \quad 2x - z - t = 0.$$

Las implícitas de la intersección se obtienen uniendo las de U u V :

$$x - y = 0, \quad 2x - z - t = 0, \quad x + y - z = 0.$$

Como $\dim(U \cap V) = 1$ (lo vimos en el apartado anterior), el número de implícitas de la intersección ha de ser $\dim(\mathbb{R}^4) - \dim(U \cap V) = 3$ y por tanto necesariamente esas tres ecuaciones son independientes.

Para hallar las paramétricas resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones implícitas en función de un parámetro (porque $\dim(U \cap V) = 1$).

$$y = x, \quad z = x + y = x + x = 2x, \quad t = 2x - z = 2x - 2x = 0.$$

Las paramétricas son:

$$x = \lambda, \quad y = \lambda, \quad z = 2\lambda, \quad t = 0.$$

Ahora hacemos el cambio de base. La matriz de cambio de B a C está formada por los vectores de la base B puestos en columna:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La fórmula de cambio de base es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_C = M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}_B.$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ en la base canónica escritas matricialmente son:

$$(1 \quad -1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_C = 0$$

$$(2 \quad 0 \quad -1 \quad -1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_C = 0$$

$$(1 \quad 1 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_C = 0$$

Aplicando la fórmula de cambio de base queda:

$$\begin{aligned} (1 \quad -1 \quad 0 \quad 0) M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}_B &= 0 \\ (2 \quad 0 \quad -1 \quad -1) M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}_B &= 0 \\ (1 \quad 1 \quad -1 \quad 0) M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}_B &= 0 \end{aligned}$$

Operando, las implícitas en la base B resultan:

$$z' = 0, \quad 2x' - 2y' + 2z' - t' = 0, \quad 2x' - y' + z' - t' = 0$$

Resolviendo en función de un parámetro:

$$z' = 0, \quad t' = 2x' - 2y', \quad 2x' - y' - (2x' - 2y') = 0 \Rightarrow y' = 0, \Rightarrow t' = 2x'.$$

Las paramétricas en la base B quedan:

$$x' = \mu, \quad y' = 0, \quad z' = 0, \quad t' = 2\mu.$$

(iii) *Dar las ecuaciones paramétricas en la base canónica de un subespacio suplementario a V .*

Como $\dim(V) = 3$ y $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ un espacio suplementario a V tiene que tener dimensión $\dim(\mathbb{R}^4) - \dim(V) = 4 - 3 = 1$.

Estará generado por un vector que sea independiente a los generadores de V ; o equivalentemente que no cumpla la ecuación implícita de V . Tomamos un vector que no cumpla $x + y - z = 0$; por ejemplo $W = \mathcal{L}\{(0, 0, 0, 1)\}$.

Entonces $\dim(V \cap W) = 0$ y $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = 3 + 1 - 0 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ y por tanto son suplementarios.

Las paramétricas de W son:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = \alpha.$$

Y eliminando parámetros, las implícitas:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

(1.3 puntos)

7.— Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales y:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{1\}$$

(i) *Demostrar que U es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Hay que demostrar:

a) Que contiene al vector nulo, es decir, el polinomio constante $p_0(x) = 0$.

b) Si $p(x), q(x) \in U$ y $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $ap(x) + bq(x) \in U$.

Efectivamente:

a) $p_0(1) = 0$ y por tanto $p_0(x) \in U$.

b) Si $p(x), q(x) \in U$ entonces $p(1) = q(1) = 0$ y:

$$ap(0) + bq(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

y por tanto $ap(x) + bq(x) \in U$.

(ii) Probar que U y V son subespacios suplementarios.

Para que sean suplementarios tiene que cumplirse que $\dim(U) + \dim(V) = \dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ y $\dim(U+V) = \dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$.

Si trabajamos respecto a la base canónica $C = \{1, x, x^2\}$ de manera que $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \equiv (a_0, a_1, a_2)_C$, U puede escribirse como:

$$U = \{(a_0, a_1, a_2)_C | a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 0\} = \{(a_0, a_1, a_2)_C | a_0 + a_1 + a_2 = 0\}.$$

Como está definido por una única ecuación implícita $\dim(U) = \dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) - 1 = 3 - 1 = 2$.

Por otra parte como V está generado por un vector $\dim(V) = 1$ y así se cumple la condición:

$$\dim(U) + \dim(V) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$$

Para hallar $\dim(U+V)$ de la ecuación implícita de U pasamos a las paramétricas:

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0 \iff a_2 = -a_0 - a_1.$$

Quedan:

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = \beta, \quad a_2 = -\alpha - \beta$$

y así:

$$U = \mathcal{L}\{(1, 0, -1)_C, (0, 1, -1)_C\}.$$

Además $V = \mathcal{L}\{1\} = \mathcal{L}\{(1, 0, 0)_C\}$. Entonces:

$$\dim(U+V) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = \dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})).$$

Por tanto SI son suplementarios.

(iii) Hallar la matriz asociada a la proyección sobre U paralelamente a V .

Consideramos la base auxiliar:

$$B = \{\underbrace{(1, 0, -1)_C, (0, 1, -1)_C}_U, \underbrace{(1, 0, 0)_C}_V\}$$

Sabemos que en esa base la matriz de la proyección es:

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hacemos el cambio de base a la canónica:

$$P_C = M_{CB}P_B M_{BC} = M_{CB}P_B M_{CB}^{-1}, \quad \text{donde } M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$P_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iv) Hallar la proyección de $(1+x)^2$ sobre V paralelamente a U .

La proyección sobre U paralelamente a V se hallan multiplicando la matriz P_C obtenida en el apartado anterior por las coordenadas de $(1+x)^2$. Donde $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 = (1, 2, 1)_C$:

$$P_C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la proyección de $(1+x)^2$ sobre U paralelamente a V es:

$$(-3, 2, 1)_C = -3 + 2x + x^2.$$

Como las dos proyecciones (sobre U y sobre V) suman el vector original, la que se pide es:

$$(1+x)^2 - (-3 + 2x + x^2) = 4.$$

(1.2 puntos)

8.— De un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se sabe que $\ker(f) = \mathcal{L}\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + 2z = 0\}$, que $f(1, 1, 0) = (1, -1, 0)$.

(i) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

Para definir una aplicación lineal, basta conocer las imágenes de los vectores de una base. Por los datos del enunciado sabemos que $f(1, 1, 0) = (1, -1, 0)$. Además los vectores del núcleo tienen el cero por imagen. Pasamos la implícita del núcleo a paramétricas y luego a generadores:

$$x + y + 2z = 0 \iff x = -y + 2z$$

de donde:

$$x = -\alpha + 2\beta, \quad y = \alpha, \quad z = \beta$$

y

$$\ker(F)\mathcal{L} = \{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\} = \mathcal{L}\{(1, -1, 0), (2, 0, 1)\}$$

de manera que:

$$f(1, 1, 0) = (1, -1, 0), \quad f(1, -1, 0) = (0, 0, 0), \quad f(2, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Vemos que esos tres vectores forman una base D de $\mathbb{R}^3$ ya que son tantos vectores como la dimensión del espacio y además el rango de la matriz de coordenadas es 3:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

La matriz asociada a f respecto de la base D en el espacio de partida y la base canónica en el de llegada es:

$$F_{CD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente cambiamos a la base canónica:

$$F_{CC} = F_{CD}MDC = F_{CD}M_{CD}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Hallar las ecuaciones implícitas de $Im(f)$.

Por la fórmula de las dimensiones sabemos que $\dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(ker(f)) = 3 - 2 = 1$. Como $f(1, 1, 0) = (1, -1, 0)$, $(1, -1, 0) \in Im(f)$ y dado que $\dim(Im(f)) = 1$, de hecho, $Im(f) = \mathcal{L}\{(1, -1, 0)\}$.

Del generador pasamos a paramétricas y eliminando parámetros a implícitas:

$$x = a, \quad y = -a, \quad z = 0.$$

Queda:

$$x + y = 0, \quad z = 0.$$

(iii) ¿Es f diagonalizable?. Razona la respuesta.

Dado que $\dim(ker(f)) = 2$, el 0 es autovalor con multiplicidad geométrica 2. Por tanto la multiplicidad algebraica del cero (que es mayor o igual que la geométrica) al menos es 2. Dado que la suma de los autovalores es la traza de la matriz contados con multiplicidad, tenemos que:

$$0 + 0 + \lambda_3 = \text{traza}(F_{CC}) = 1/2 - 1/2 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0.$$

Por tanto el tercer autovalor también es 0. O en otras palabras la multiplicidad algebraica de 0 es 3. Como no coincide con la geométrica, no diagonaliza.

(1 punto)

9.— Dada la matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Calcular los autovalores y autovectores de F .

Los autovalores pueden calcularse como las raíces del polinomio característico. Este es:

$$|F - \lambda Id| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Los autovalores resultan:

$\lambda_1 = 0$ con multiplicidad algebraica 1.

$\lambda_2 = 1$ con multiplicidad algebraica 2.

$\lambda_3 = 2$ con multiplicidad algebraica 1.

Para cada uno de ellos calculamos los autovectores asociados.

Para $\lambda_1 = 0$:

$$(F - 0 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2y + z + t = 0 \\ z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2y + z + t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo paramétricamente queda:

$$z = 0, \quad t = -2y, \quad x = -y - y = y$$

es decir:

$$x = \mu, \quad y = \mu, \quad z = 0, \quad t = -2\mu$$

El subespacio característico de autovectores es:

$$S_0 = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, -2)\}.$$

Para $\lambda_2 = 1$:

$$(F - 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y + z + t = 0 \\ y + z + t = 0 \\ 3z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + z + t = 0 \\ 3z - t = 0 \end{cases}$$

Resolviendo paramétricamente queda:

$$t = 3z, \quad y = -z - y = -4z$$

es decir:

$$x = \alpha, \quad y = -4\beta, \quad z = \beta, \quad t = 3\beta$$

El subespacio característico de autovectores es:

$$S_1 = \mathcal{L}\{(1, 0, 0, 0), (0, -4, 1, 3)\}.$$

Para $\lambda_3 = 2$:

$$(F - 2 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + y + z + t = 0 \\ z + t = 0 \\ -z = 0 \\ 3z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + z + t = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Resolviendo paramétricamente queda:

$$t = 0, \quad z = 0, \quad x = y + z + y = y$$

es decir:

$$x = \gamma, \quad y = \gamma, \quad z = 0, \quad t = 0$$

El subespacio característico de autovectores es:

$$S_2 = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 0)\}.$$

(ii) Si existe, dar una matriz P inversible y una matriz D diagonal tales que $P^{-1}FP = D$.

La relación $P^{-1}FP = D$, es de semejanza. Una matriz diagonaliza por semejanza si y sólo si existe una base de autovectores.

En el apartado anterior vimos que tenemos 4 autovectores independientes (uno asociado al cero; dos asociados al uno y uno asociado al dos) y por tanto una base de autovectores.

También podemos llegar a la misma conclusión viendo que:

- La suma de las multiplicidades algebraicas es 4: $m.a.(0) + m.a.(1) + m.a.(2) = 1 + 2 + 1 = 4$.

- Las geométricas coinciden con las alebragicas. La geométrica es el número de autovectores independientes asociados al autovalores y ya vimos que son respectivamente 1, 2, 1 para los autovalores 0, 1, 2.

La matriz diagonal D es la formada por los autovalores y la P por los autovectores puestos en columna:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Calcular n para que $\text{traza}(F^n) = 66$.

La traza se conserva por semejanza y además si $P^{-1}FP = D$ entonces $P^{-1}F^nP = D^n$.

Por tanto:

$$\text{traza}(F^n) = \text{traza}(D^n) = \text{traza} \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = 0 + 1 + 1 + 2^n = 2^n + 2.$$

Imponemos:

$$\text{traza}(F^n) = 66 \iff 2^n + 2 = 66 \iff 2^n = 64 \iff 2^n = 2^6 \iff n = 6.$$

(1.1 puntos)
