

1.— Se tienen 6 sobres de seis colores diferentes. Se distribuyen en ellos seis tarjetas de los mismos colores. Calcular las distintas formas de hacerlo si:

- (i) en cada uno de ellos sólo puede haber una tarjeta y solamente dos de ellas no van en el sobre de su mismo color.
- (ii) en alguno de los sobres van 4 tarjetas y las dos restantes en sobres diferentes. Da igual si van o no en el sobre de su color.

(1 punto)

2.— Para cada número natural $n \geq 2$ se define la matriz $n \times n$:

$$(M_n)_{ij} = i + j^2$$

- (i) Escribir M_4 y hallar su rango y determinante.
- (ii) Calcular $\det(M_n)$ y $\text{rango}(M_n)$ para cualquier $n \geq 2$.

(1 punto)

3.— Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

- (i) Dar una matriz diagonal D y una matriz P inversible tal que $P^t A P = D$.
- (ii) Dar una matriz simétrica B no diagonal y que NO sea congruente con A .

(1 punto)

4.— Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$:

- (i) Hallar a para que A y B sean equivalentes por filas.
- (ii) Hallar, si existe, una matriz inversible Q tal que $AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1.2 puntos)

5.— Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (i) Si $A, B \in M_{n \times n}$ son matrices no inversibles entonces $A + B$ no tiene inversa.
- (ii) Si $A, B \in M_{n \times n}$ son matrices no inversibles entonces $A \cdot B$ no tiene inversa.
- (iii) La matriz asociada a una aplicación proyección sobre un subespacio paralelamente a otro siempre es diagonalizable por semejanza.
- (iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 2xy + 2y^2 = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

(1.2 puntos)

6.— En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y dado un número real k , se consideran los subespacios:

$$U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 2), (1, 1, 1, 1), (1, 1, k, 3)\}, \quad V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - z = 0\}.$$

- (i) Hallar la dimensión de U , V , $U + V$ y $U \cap V$ en función de k .
- (ii) Para $k = -1$, hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap V$ en la base canónica y en la base $B = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$.
- (iii) Dar las ecuaciones paramétricas en la base canónica de un subespacio suplementario a V .

(1.3 puntos)

7.— Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales y:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{1\}$$

- (i) Demostrar que U es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (ii) Probar que U y V son subespacios suplementarios.
- (iii) Hallar la matriz asociada a la proyección sobre U paralelamente a V .
- (iv) Hallar la proyección de $(1 + x)^2$ sobre V paralelamente a U .

(1.2 puntos)

8.— De un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se sabe que $\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + 2z = 0\}$, que $f(1, 1, 0) = (1, -1, 0)$.

- (i) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.
- (ii) Hallar las ecuaciones implícitas de $\text{Im}(f)$.
- (iii) ¿Es f diagonalizable?. Razona la respuesta.

(1 punto)

9.— Dada la matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- (i) Calcular los autovalores y autovectores de F .
- (ii) Si existe, dar una matriz P inversible y una matriz D diagonal tales que $P^{-1}FP = D$.
- (iii) Calcular n para que $\text{traza}(F^n) = 66$.

(1.1 puntos)

1.— Téñense 6 sobres de seis cores diferentes. Distribúense neles seis tarxetas das mesmas cores. Calcular as distintas formas de facelo se:

- (i) en cada un deles só pode haber unha tarxeta e soamente dúas delas non van no sobre da súa mesma cor.
- (ii) en algún dos sobres van 4 tarxetas e as dúas restantes en sobres diferentes. Dá igual se van ou non no sobre da súa cor.

(1 punto)

2.— Para cada número natural $n \geq 2$ defínese a matriz $n \times n$:

$$(M_n)_{ij} = i + j^2$$

- (i) Escribir M_4 e atopar o seu rango e determinante.
- (ii) Calcular $\det(M_n)$ e $\text{rango}(M_n)$ para calquera $n \geq 2$.

(1 punto)

3.— Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

- (i) Dar unha matriz diagonal D e unha matriz P inversible tal que $P^t A P = D$.
- (ii) Dar unha matriz simétrica B non diagonal e que NON sexa congruente con A .

(1 punto)

4.— Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$:

- (i) Atopar a para que A e B sexan equivalentes por filas.
- (ii) Atopar, se existe, unha matriz inversible Q tal que $AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1.2 puntos)

5.— Razoar a veracidade ou falsidade das seguintes afirmacións:

- (i) Se $A, B \in M_{n \times n}$ son matrices non inversibles entón $A + B$ non ten inversa.
- (ii) Se $A, B \in M_{n \times n}$ son matrices non inversibles entón $A \cdot B$ non ten inversa.
- (iii) A matriz asociada a unha aplicación proxección sobre un subespazo paralelamente a outro sempre é diagonalizable por semellanza.
- (iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2xy + 2y^2 = 0\}$ é un subespazo vectorial de $\mathbb{R}^2$.

(1.2 puntos)

6.— No espazo vectorial $\mathbb{R}^4$ e dado un número real k , considéranse os subespazos:

$$U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 2), (1, 1, 1, 1), (1, 1, k, 3)\}, \quad V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - z = 0\}.$$

- (i) Atopar a dimensión de U , V , $U + V$ e $U \cap V$ en función de k .
- (ii) Para $k = -1$, atopar as ecuacións paramétricas e implícitas de $U \cap V$ na base canónica e na base $B = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$.
- (iii) Dar as ecuacións paramétricas na base canónica dun subespazo suplementario a V .

(1.3 puntos)

7.— Sexa $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espazo vectorial de polinomios de grao menor ou igual ca 2 con coeficientes reais e:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{1\}$$

- (i) Demostrar que U é un subespazo vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (ii) Probar que U e V son subespazos suplementarios.
- (iii) Atopar a matriz asociada á proxección sobre U paralelamente a V .
- (iv) Atopar a proxección de $(1 + x)^2$ sobre V paralelamente a U .

(1.2 puntos)

8.— Dun endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sábese que $\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + 2z = 0\}$, que $f(1, 1, 0) = (1, -1, 0)$.

- (i) Atopar a matriz asociada a f respecto da base canónica.
- (ii) Atopar as ecuacións implícitas de $\text{Im}(f)$.
- (iii) É f diagonalizable?. Razoa a resposta.

(1 punto)

9.— Dada a matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- (i) Calcular os autovalores e autovectores de F .
- (ii) Se existe, dar unha matriz P inversible e unha matriz D diagonal tales que $P^{-1}FP = D$.
- (iii) Calcular n para que $\text{traza}(F^n) = 66$.

(1.1 puntos)