Álgebra Lineal I Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **6 de julio de 2020**

1.– *Con las 27 letras del alfabeto y los dígitos del 0 al 9 se forman contraseñas de 8 caracteres (pueden repetirse).*

(i) *¿Cuántas contraseñas distintas pueden crearse?.*

Para formar una contraseña hay que seleccionar 8 caracteres entre un total de $27 + 10 = 37$ posibles (entre letras y números) pudiendo repetirlos y teniendo en cuenta que el orden en que aparezcan diferencia una contraseña de otra. Son por tanto variaciones con repetición de 37 elementos tomados de 8 en 8:

$$VR_{37,8} = 37^8 = 3512479453921.$$

(ii) *¿Cuántas de ellas están formadas por exactamente 6 letras y 2 dígitos?.*

Primero contamos las formas de contar en que 2 posiciones entre las 8 posibles están los dos dígitos. Son las formas de elegir 2 elementos entre 8 posibles sin importar el orden (da igual decir que están en la posición cuarta y sexta que en la sexta y cuarta) y sin repetir: combinaciones sin repeteción $C_{8,2} = \binom{8}{2}$.

Una vez fijados donde irán las letras y números, como en el apartado 1 las formas de elegirlos en cada caso son variaciones con repetición. En total queda:

$$C_{8,2} \cdot VR_{27,6} \cdot VR_{10,2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot 27^6 \cdot 10^2 = 1084777369200.$$

(iii) *¿Cuántas tiene al menos una letra y un número?.*

Restamos del total (calculado en el primer apartado) las que no tienen letras y las que no tienen números.

Las que están formadas sólo por letras son (razonando como en (i)), $VR_{27,8} = 27^8$.

Las que están formadas sólo por números son , $VR_{10,8} = 27^8$.

Por tanto las que tienen al menos una letra y un número son:

$$VR_{37,8} - VR_{27,8} - VR_{10,8} = 37^8 - 27^8 - 10^8 = 3229949917440.$$

(1 punto)

2.– *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) *Hallar (si existe) una matriz inversible X tal que $XA = B$.*

La existencia de X en las condiciones indicadas corresponde al hecho de que A y B sean equivalentes por filas, siendo X la matriz de paso.

Para analizar si son equivalente por filas hallamos y comparamos las formas canónicas reducidas por filas de cada una de ellas:

$$A \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{23}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$B \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que las formas canónicas reducidas por filas NO coinciden, por tanto NO son equivalentes por filas y no existe la matriz X pedida.

(ii) *Hallar (si existe) una matriz inversible* Y *tal que* $AY = B$.

Ahora la matriz Y multiplica por la derecha. El problema es análogo al del apartado anterior pero ahora con equivalencia por columnas.

Analizamos las formas canónicas reducidas por columnas de ambas.

$$A \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}(-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1)} \xrightarrow{\mu_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$B \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos la misma forma reducida; por tanto si son equivalentes por columnas y existe la matriz Y pedida. Para calcularla hacemos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hicimos sobre A y despueés la inversa y en orden inverso de las que hicimos sobre B:

$$Id \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}(-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1)} \xrightarrow{\mu_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{13}(-1)}$$

$$\xrightarrow{\mu_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}^{-1}=\mu_{12}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) *¿Son* A *y* B *matrices equivalentes?.*

Si; acabamos de ver que son equivalentes por columna y por tanto son equivalentes.

(iv) *Estudiar si* AA^t *y* BB^t *son congruentes.*

Tenemos:

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad BB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Id$$

Son dos matrices simétricas. Son congruentes si al diagonalizarlas por congruencia (mismas operaciones fila y columna) se obtienen matrices con los mismos signos en la diagonal. La matriz BB^t ya está diagonalizada: es la identidad con tres signos positivos en la diagonal.

Veamos que ocurre con AA^t:

$$AA^t \xrightarrow{H_{21}(-5/3)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-5/3)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \xrightarrow{\mu_{23}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Vemos que en la forma diagonalizada también aparecen tres signos positivos. Por tanto AA^t y BB^t SI son congruentes.

(1.8 puntos)

3.– *Sabiendo que det* $\begin{pmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{pmatrix} = 5$ *calcular:*

(i) *det* $\begin{pmatrix} 2-3a & b & 0 \\ 2 & b & 3 \\ 5 & 2b+5 & c+6 \end{pmatrix}$

Aplicamos las propiedades de los determinantes. Comenzamos restando la segunda fila a la primera y el doble de la segunda a la tercera:

$$\begin{vmatrix} -3a & 0 & -3 \\ 2 & b & 3 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & b & 3 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 = 15.$$

(ii) *det* $\begin{pmatrix} b & 5 & 0 \\ 4 & c+2 & 2 \\ a+2 & 2a+1 & 2a \end{pmatrix}$.

Comenzamos sacando factor común a 2 a la tercera columna; luego multiplicada por 1 y por 2 se la restamos a las primeras:

$$2\begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ 4 & c+2 & 1 \\ a+2 & 2a+1 & a \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ 3 & c & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} b & 0 & 5 \\ 3 & 1 & c \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & 1 & c \\ b & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= -2\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ b & 0 & 5 \\ 3 & 1 & c \end{vmatrix} = -2det\begin{pmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{pmatrix}^t = -2 \cdot 5 = -10.$$

(1.2 puntos)

4.– *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *dado el parámetro* $a \in \mathbb{R}$ *se definen los conjuntos:*

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(1, -1, 1), (1, a, 1)\}$$

(i) *En función de a calcular* $dim(U)$, $dim(V)$, $dim(U + V)$ *y* $dim(U \cap V)$.

El subespacio U viene dado por una ecuación implícita. Su dimensión es:

$$dim(U) = dim(\mathbb{R}^3) - \text{n de ecuaciones} = 3 - 1 = 2.$$

El subespacio V viene dado por sus generadores. Su dimensión es el número de generadores independientes; equivalentemente el rango de la matriz que forman sus coordenadas en la base canónica:

$$dim(V) = rango\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \text{ si } a \neq -1 \\ 1 \text{ si } a = -1 \end{cases}$$

Para hallar $dim(U + V)$ calculamos primero los generadores de U resolviendo paramétricamente su ecuación implícita:

$$x + y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -y - z \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -a - b \\ y = a \\ z = b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U = \mathcal{L}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

Entonces $U+V$ está generado por los generadores de ambos subespacios; equivalentemente corresponde al rango de su matriz de coordenadas. Podemos usar los generadores de V previamente escalonados:

$$dim(U+V) = rango \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Por último usamos la fórmula de las dimensones, $dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U+V)$:

a	U	V	$U+V$	$U \cap V$
$a = -1$	2	1	3	0
$a \neq -1$	2	2	3	1

(ii) *Para $a = -1$ probar que los subespacios U y V son suplementarios. Calcular además la proyección del vector $(3,2,1)$ sobre V paralelamente a U.*

Dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ son suplementarios si $U+V = \mathbb{R}^3$ y $U \cap V = \{\vec{0}\}$; equivalentemente si $dim(U+V) = 3$ y $dim(U \cap V) = 0$. Pero acabamos de ver en el apartado anterior que para $a = -1$ esto se cumple.

Para calcular a proyección del vector $(3,2,1)$ sobre V paralelamente a U tomamos una base B formada por vectores de U y de V:

$$B = \{\underbrace{(-1,1,0),(-1,0,1)}_{U}, \underbrace{(1,-1,1)}_{V}\}$$

Escribimos las coordenadas del vector dado en la base B mediante la matriz de cambio de base:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{CB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}_B$$

De donde:

$$(3,2,1) = (8,-5,6)_B = \underbrace{8(-1,1,0) - 5(-1,0,1)}_{U} + \underbrace{6(1,-1,1)}_{V}$$

y así:

$$proy_V(3,2,1) = 6(1,-1,1) = (6,-6,6)$$

(iii) *Demostrar que $B = \{(0,0,1),(1,0,1),(0,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.*

Dado que $dim(\mathbb{R}^3) = 3$, para que tres vectores formen base es suficiente que sean independientes. Equivalentemente que el rango de su matriz de coordenadas sea 3:

$$rango \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

(iv) *Para $a = 0$ hallar las ecuaciones implícitas de V respecto de la base B.*

Para $a = 0$ tenemos que $V = \mathcal{L}\{(1,-1,1),(0,1,0)\}$. De ahí sus ecuaciones paramétricas en la base canónica son:

$$x = a, \quad y = -a + b, \quad z = a.$$

Obtenemos la implícita en la base canónica eliminando parámetros:

$$x = z \quad \Longleftrightarrow \quad x - z = 0.$$

La reescribimos matricialmente para hacer el cambio de base:

$$x - z = 0 \iff (1 \quad 0 \quad -1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0 \iff (1 \quad 0 \quad -1) M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$-x' - z' = 0 \iff x' + z' = 0.$$

(v) *Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $ker(f) = U$ y $f(1,0,0) = (1,0,0)$. ¿Cuáles serían sus autovalores y autovectores?.*

Queremos que:

$$ker(f) = \mathcal{L}\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}, \qquad f(1,0,0) = (1,0,0).$$

Usaremos que una aplicación lineal queda determinada si sabemos como actúa sobre una base. Tomamos una base en la cuál tenemos información sobre como funciona la aplicación lineal:

$$B' = \{(1,0,0), (-1,1,0), (-1,0,1)\}$$

Es base porque son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ independientes, ya que $rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Sabemos que:

$$f(1,0,0) = (1,0,0), \quad f(-1,1,0) = (0,0,0), \quad f(-1,0,1) = (0,0,0)$$

y por tanto $F_{CB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y haciendo el cambio de base:

$$F_{CC} = F_{CB'} M_{B'C} = F_{CB'} M_{CB'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que $f(1,0,0) = 1(1,0,0)$, se tiene que $(1,0,0)$ es un autovector asociado al 1.

Y dado que $f(-1,1,0) = (0,0,0)$ y $f(-1,0,1) = (0,0,0)$ se tienen que $(-1,1,0)$ y $(-1,0,1)$ son autovectores asociados al 0.

Dado que la suma de multiplicidades geométricas no puede ser superior a 3 (la dimensión del espacio) se deduce que los autovalores son:

- $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica y geométrica 1 y $S_1 = \mathcal{L}\{(1,0,0)\}$.
- $\lambda_2 = 0$ con multiplicidad algebraica y geométrica 2 y $S_0 = \mathcal{L}\{(1,-1,0), (-1,0,1)\}$.

(2 puntos)

5.– *En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, se consideran los conjuntos:*

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1)p(0) = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{1 + x, 2 - x - 3x^2, (x+1)^2\}$$

(i) *Razonar si U y V son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Para que U sea subespacio vectorial si $p(x), q(x) \in U$ tiene que cumplirse que $p(x) + q(x) \in Q$, pero $p(x) = x \in U$ porque $p(1)p(0) = 1 \cdot 0 = 0$ y $q(x) = x - 1 \in U$ porque $q(1)q(0) = (1-1)(0-1) = 0$ y sin embargo $p(x) + q(x) = 2x - 1$ no está en U porque $(p(1) + q(1))(p(0) + q(0)) = 1 \cdot (-1) = -1 \neq 0$. Por tanto U NO es subespacio vectorial.

V es subespacio vectorial por definición porque es la envolvente lineal de un conjunto de vectores.

(ii) *Escribir las ecuaciones paramétricas e implícitas de V respecto de la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

La base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es $C = \{1, x, x^2\}$. Escribimos los generadores de V en esa base:

$$1 + x = (1,1,0)_C, \quad 2 - x - 3x^2 = (2,-1,-3)_C, \quad (x+1)^2 = 1 + 2x + x^2 = (1,2,1)_C.$$

Estudiamos si son independientes escalonando la matriz de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $V = \mathcal{L}\{(1,1,0)_C, (0,1,1)_C\}$. Las paramétricas son:

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = \alpha + \beta, \quad a_2 = \beta.$$

Eliminando parámetros obtenemos la impícita:

$$a_0 - a_1 + a_2 = 0.$$

(iii) *Se define la aplicación $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ como $f(p(x)) = (p(-1), p(0))$:*

(iii.a) *Probar que f es una aplicación lineal.*

Tiene que verificar que $f(\alpha p(x) + \beta q(x)) = \alpha f(p(x)) + \beta f(q(x))$. Veámoslo:

$$\begin{aligned} f(\alpha p(x) + \beta q(x)) &= (\alpha p(-1) + \beta q(-1), \alpha p(0) + \beta q(0)) = (\alpha p(-1), \alpha p(0)) + (\beta q(-1), \beta q(0)) = \\ &= \alpha(p(-1), p(0)) + \beta(q(-1), q(0)) = \alpha f(p(x)) + \beta f(q(x)) \end{aligned}.$$

(iii.b) *Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^2$.*

Las bases canónicas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^2$ son respectivamente $C = \{1, x, x^2\}$ y $C_2 = \{(1,0), (0,1)\}$. La matriz pedida es aquella cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base C con respecto a la base C_2:

$$f(1) = (1,1), \quad f(x) = (-1,0), \quad f(x^2) = ((-1)^2, 0^2) = (1,0)$$

De donde:

$$F_{C_2C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii.c) *Calcular las ecuaciones impícitas de $ker(f)$ en la base canónica.*

El núcleo está formado por los vectores cuya imagen es nula. Equivalentemente los polinomios $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = (a_0, a_1, a_2)_C$ cuyas coordenadas en la base canónica por la matriz asociada es nulo:

$$F_{C_2C} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = a_0 - a_1 + a_2 \\ 0 = a_0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = a_1 - a_2 \\ 0 = a_0 \end{cases}$$

(iii.d) *Demostrar que $ker(f) \subset V$.*

De las ecuaciones impícitas del núcleo obtenemos sus paramétricas:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \alpha, \quad a_2 = \alpha.$$

Por tanto $ker(f) = \mathcal{L}\{(0,1,1)_C\}$. Este vector cumple la implícita de V calculada en (ii) y por tanto $ker(f) \subset V$.

(2 puntos)

6.– *Dado $k \in \mathbb{R}$ se define el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$,*

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad f(x,y,z,t) = (y + kz, x, 2z + t, z + 2t)$$

(i) *Hallar la matriz F_C asociada a f respecto de la base canónica.*

Calculamos la matriz trasladando coeficientes:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) *Estudiar para que valores de k la aplicación es diagonalizable y/o triangularizable.*

Es triangularizable si la suma de las multiplicidades algebraicas de los autovalores es igual a la dimensión del espacio, es decir, a $dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Diagonaliza si además las mutiplicidades algebraicas y geométricas coinciden.

Comenzamos calculando el polinomio característico:

$$p_f(\lambda) = |F_C - \lambda Id| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & k & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2 - 1)((2-\lambda)^2 - 1) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(1 - \lambda)(3 - \lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

Los autovalores son por tanto:

- $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 2.

- $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad algebraica 1.

- $\lambda_3 = 3$ con multiplicidad algebraica 1.

La suma de algebraicas es $2 + 1 + 1 = 4$, por tanto SIEMPRE triangulariza.

Para que además diagonalice las geométricas y algebraicas han de coincidir para todos los autovalores. Cuando la algebraica es 1 sabemos que la geométrica también vale 1. Por tanto solo queda por estudiar que ocurre con la multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 1$:

$$m.g(1) = 4 - rango(F_C - 1 \cdot ID) = 4 - rango \begin{pmatrix} -1 & 1 & k & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 4 - rango \begin{pmatrix} -1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 4 - 2 = 2 \text{ si } k = 0 \\ 4 - 3 = 1 \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$$

Concluimos que:

- Si $k = 0$ triangulariza y diagonaliza.

- Si $k \neq 0$ triangulariza pero no diagonaliza.

(iii) *Para $k = 1$ calcular los autovectores de f.*

Autovectores asociados a $\lambda_1 = 1$:

$$(F_C - 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + y + z = 0,\ x - y = 0,\ z + t = 0.$$

Resolviendo obtenemos $S_1 = \mathcal{L}\{(1,1,0,0)\}$.

Autovectores asociados a $\lambda_2 = -1$:

$$(F_C + 1 \cdot Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0,\ x + y = 0,\ z = 0,\ t = 0.$$

Resolviendo obtenemos $S_{-1} = \mathcal{L}\{(1,-1,0,0)\}$.

Autovectores asociados a $\lambda_3 = 3$:

$$(F_C - 3 \cdot Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -3x + y + z = 0,\ x - 3y = 0,\ -z + t = 0.$$

Resolviendo obtenemos $S_3 = \mathcal{L}\{(3/8, 1/8, 1, 1)\}$.

(iv) *Para $k = 0$ hallar una base B en la cual la matriz asociada F_B sea diagonal.*

Vimos que para $k = 0$ el endomorfismo diagonaliza. La base B es la formada por los autovectores:

Autovectores asociados a $\lambda_1 = 1$:

$$(F_C - 1 \cdot Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + y = 0,\ z + t = 0.$$

Resolviendo obtenemos $S_1 = \mathcal{L}\{(1,1,0,0), (0,0,1,-1\}$.

Autovectores asociados a $\lambda_2 = -1$:

$$(F_C + 1 \cdot Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0\, z = 0,\ t = 0.$$

Resolviendo obtenemos $S_{-1} = \mathcal{L}\{(1,-1,0,0)\}$.

Autovectores asociados a $\lambda_3 = 3$:

$$(F_C - 3 \cdot Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -3x + y = 0,\ x - 3y = 0,\ -z + t = 0.$$

Resolviendo obtenemos $S_3 = \mathcal{L}\{(0,0,1,1)\}$.

Por tanto $B = \{(1,1,0,0), (0,0,1,-1), (1,-1,0,0), (0,0,1,1)\}$ y $F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(v) *Para $k = 0$ hallar una expresión general para F_C^n.*

Tenemos que $F_C = M_{CB} F_B M_{CB}^{-1}$ por tanto:

$$F_C^n = M_{CB} F_B^n M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n & 0 & 0 \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+3^n & -1+3^n \\ 0 & 0 & -1+3^n & 1+3^n \end{pmatrix}$$

(vi) *¿Existe algún valor de k para el cuál $(1,1,1,1) \notin Im(f)$?.*

Para cualquier valor de k se tiene que $rango(F_B) = 4$. Por tanto $dim(Im(f)) = 4 = dim(\mathbb{R}^4)$ y así todos los vectores están en la imagen.

En otras palabras NO existe valor alguno de k para el cuál $(1,1,1,1)$ no está en la imagen de f.

(2 puntos)