Normas :

1) Al incorporarse a la reunión, indicar por escrito en el en chat de Teams la asistencia al examen.

2) En la primera hoja del examen deberá constar firmada la siguiente declaración:

D./Dña.. estudiante de la asignatura Álgebra Lineal I, del Grado de Tecnología de la Ingeniería Civil, declara por su honor que ha realizado este examen sin ayuda de otras personas y respetando las normas establecidas.

A Coruña, 6 de Julio de 2020.

3) Al finalizar el examen debe de enviarse escaneado en formato PDF, por moodle, Teams o correo electrónico. Se comunicará el envío al profesor responsable, esperando a que éste confirme la correcta recepción.

4) Durante el examen pueden preguntarse dudas en el grupo de Teams, bien sea por escrito o por micrófono, de manera pública o si se considera necesario, privada.

5) Ante cualquier imprevisto o problema de conexión podéis contactar con el profesor responsable en el número 881 011 462.

Álgebra Lineal I — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **6 de julio de 2020**

1.– Con las 27 letras del alfabeto y los dígitos del 0 al 9 se forman contraseñas de 8 caracteres (pueden repetirse).

(i) ¿Cuántas contraseñas distintas pueden crearse?.

(ii) ¿Cuántas de ellas están formadas por exactamente 6 letras y 2 dígitos?.

(iii) ¿Cuántas tiene al menos una letra y un número?.

(1 punto)

2.– Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Hallar (si existe) una matriz inversible X tal que $XA = B$.

(ii) Hallar (si existe) una matriz inversible Y tal que $AY = B$.

(iii) ¿Son A y B matrices equivalentes?.

(iv) Estudiar si AA^t y BB^t son congruentes.

(1.8 puntos)

3.– Sabiendo que $det \begin{pmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{pmatrix} = 5$ calcular:

(i) $det \begin{pmatrix} 2-3a & b & 0 \\ 2 & b & 3 \\ 5 & 2b+5 & c+6 \end{pmatrix}$ (ii) $det \begin{pmatrix} b & 5 & 0 \\ 4 & c+2 & 2 \\ a+2 & 2a+1 & 2a \end{pmatrix}$.

(1.2 puntos)

4.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ dado el parámetro $a \in \mathbb{R}$ se definen los conjuntos:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(1, -1, 1), (1, a, 1)\}$$

(i) En función de a calcular $dim(U)$, $dim(V)$, $dim(U + V)$ y $dim(U \cap V)$.

(ii) Para $a = -1$ probar que los subespacios U y V son suplementarios. Calcular además la proyección del vector $(3, 2, 1)$ sobre V paralelamente a U.

(iii) Demostrar que $B = \{(0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(iv) Para $a = 0$ hallar las ecuaciones implícitas de V respecto de la base B.

(v) Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $ker(f) = U$ y $f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$. ¿Cuáles serían sus autovalores y autovectores?.

(2 puntos)

5.– En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, se consideran los conjuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1)p(0) = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{1 + x, 2 - x - 3x^2, (x + 1)^2\}$$

(i) Razonar si U y V son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(ii) Escribir las ecuaciones paramétricas e implícitas de V respecto de la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(iii) Se define la aplicación $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ como $f(p(x)) = (p(-1), p(0))$:

(iii.a) Probar que f es una aplicación lineal.

(iii.b) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^2$.

(iii.c) Calcular las ecuaciones impícitas de $ker(f)$ en la base canónica.

(iii.d) Demostrar que $ker(f) \subset V$. (2 puntos)

6.– Dado $k \in \mathbb{R}$ se define el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$,

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad f(x, y, z, t) = (y + kz, x, 2z + t, z + 2t)$$

(i) Hallar la matriz F_C asociada a f respecto de la base canónica.

(ii) Estudiar para que valores de k la aplicación es diagonalizable y/o triangularizable.

(iii) Para $k = 1$ calcular los autovectores de f.

(iv) Para $k = 0$ hallar una base B en la cual la matriz asociada F_B sea diagonal.

(v) Para $k = 0$ hallar una expresión general para F_C^n.

(vi) ¿Existe algún valor de k para el cuál $(1, 1, 1, 1) \notin Im(f)$?.

(2 puntos)

Normas :

1) Ó chegaren á reunión, indicar por escrito no chat de Teams a asistencia ó exame.

2) Na primeria folla do exame deberá constar firmada a seguinte declaración:

D./Dña.. estudiante da asignatura Álxebra Lineal I, do Grao de Tecnoloxía da Enxeñería Civil, declara pola súa honra que realizou este exame sen axuda doutras persoas e respetando as normas establecidas.

A Coruña, 6 de Xullo de 2020.

3) Ó finalizar o exame debe de enviarse escaneado en formato PDF, por moodle, Teams ou correo electrónico. Comunicarase o envío ó profesor responsable, esperando a que éste confirme a correcta recepción.

4) Durante o exame poden preguntarse dudas no grupo de Teams, ben sexa por escrito ou por micrófono, de manera pública ou si se considera necesario, privada.

5) Ante calqueira dúbida, imprevisto ou problema de conexión podedes contactar co profesor responsable no número 881 011 462.

Álxebra Lineal I — Exame Final

Exercicio único (3 horas.) **6 de xullo de 2020**

1.– Coas 27 letras do alfabeto e os díxitos do 0 ó 9 fórmanse contrasinais de 8 caracteres (poden repetirse).

(i) Cantas contrasianis distintas poden crearse?.

(ii) Cantas delas están formadas por exactamente 6 letras e 2 díxitos?.

(iii) Cantas teñen polo menos unha letra e un número?.

(1 punto)

2.– Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Atopar (se existe) unha matriz inversible X tal que $XA = B$.

(ii) Atopar (se existe) unha matriz inversible Y tal que $AY = B$.

(iii) Son A e B matrices equivalentes?.

(iv) Estudiar se AA^t e BB^t son congruentes.

(1.8 puntos)

3.– Sabendo que $det \begin{pmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{pmatrix} = 5$ calcular:

(i) $det \begin{pmatrix} 2-3a & b & 0 \\ 2 & b & 3 \\ 5 & 2b+5 & c+6 \end{pmatrix}$ (ii) $det \begin{pmatrix} b & 5 & 0 \\ 4 & c+2 & 2 \\ a+2 & 2a+1 & 2a \end{pmatrix}$.

(1.2 puntos)

4.– No espazo vectorial $\mathbb{R}^3$ dado o parámetro $a \in \mathbb{R}$ se definen os conxuntos:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(1, -1, 1), (1, a, 1)\}$$

(i) En función de a calcular $dim(U)$, $dim(V)$, $dim(U + V)$ e $dim(U \cap V)$.

(ii) Para $a = -1$ probar que os subespazos U e V son suplementarios. Calcular ademais a proxección do vector $(3, 2, 1)$ sobre V paralelamente a U.

(iii) Demostrar que $B = \{(0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ é unha base de $\mathbb{R}^3$.

(iv) Para $a = 0$ atopar as ecuacións implícitas de V respecto da base B.

(v) Atopar a matriz asociada respecto da base canónica dun endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $ker(f) = U$ e $f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$. Cales serían os seus autovalores e autovectores?.

(2 puntos)

5.– No espazo vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grao menor ou igual que 2 con coeficientes reais, se consideran os conxuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1)p(0) = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{1 + x, 2 - x - 3x^2, (x + 1)^2\}$$

(i) Razoar se U e V son subespazos vectoriais de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(ii) Escribir as ecuacións paramétricas e implícitas de V respecto da base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(iii) Defínese a aplicación $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ como $f(p(x)) = (p(-1), p(0))$:

(iii.a) Probar que f é unha aplicación lineal.

(iii.b) Atopar a matriz asociada a f respecto das bases canónicas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^2$.

(iii.c) Calcular as ecuacións impícitas de $ker(f)$ n base canónica.

(iii.d) Demostrar que $ker(f) \subset V$. (2 puntos)

6.– Dado $k \in \mathbb{R}$ se define o endomorfismo de $\mathbb{R}^4$,

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad f(x, y, z, t) = (y + kz, x, 2z + t, z + 2t)$$

(i) Atopar a matriz F_C asociada a f respecto da base canónica.

(ii) Estudiar para que valores de k a aplicación é diagonalizable e/ou triangularizable.

(iii) Para $k = 1$ calcular os autovectores de f.

(iv) Para $k = 0$ atopar unha base B na que a matriz asociada F_B sexa diagonal.

(v) Para $k = 0$ atopar unha expresión xeral para F_C^n.

(vi) Existe algún valor de k para o que $(1, 1, 1, 1) \notin Im(f)$?.

(2 puntos)
