Álgebra Lineal I — Soluciones al Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **9 de enero de 2020**

1.– *Tenemos siete sobres y siete tarjetas de siete colores distintos.*

(i) *¿De cuántas formas pueden distribuirse las tarjetas en los sobres de manera que en cada sobre se introduce una tarjeta?.*

Si colocamos los sobres en fila en un orden prefijado, la distintas formas de distribuir una tarjeta en cada sobre, equivale a las distintas formas de ordenar las 7 tarjetas en las 7 posiciones em las que están los sobres. Se trata por tanto de permutaciones de 7 elementos:

$$P_7 = 7! = 5040.$$

¿En cuántas de ellas exactamente cinco sobres llevan la tarjeta de su color?.

Primero contamos las formas de elegir que cinco sobres llevarn la tarjeta de su color. Son las formas de elegir 5 elementos entre un total de 7 sin poder repetirlos y sin importar el orden en que se elijan: se trata de combinaciones sin repetición de 7 elementos tomados de 5 en 5,

$$C_{7,5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21.$$

Por cada una de estas elecciones las otras dos tarjetas no pueden ir en el sobre de su color, luego sólo hay una forma de colocarlos.

(ii) *¿De cuántas formas distintas puede distribuirse las tarjetas si pueden ir varias en un mismo sobre y quedar sobres vacíos?.*

En este caso cada tarjeta puede ir en cualquiera de los 7 sobres. Por tanto son las formas de elegir 7 elementos entre 7 posibles pudiendo repetir e importando el orden en que se hace. Se trata de variaciones con repetición de 7 elementos tomados de 7 en 7:

$$VR_{7,7} = 7^7 = 285311670611$$

Otra forma de verlo es: para la primera tarjeta tenemos 7 posibles sobres donde meterla; para la segunda de nuevo 7 opciones; para la tercera, lo mismo y así sucesivamente. En total:

$$\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 7}_{7 \text{ veces}} = 7^7.$$

(1 punto)

2.– *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$.

(i) *Estudiar para que valores de a, b, c las matrices A y B son congruentes.*

En primer lugar recordemos que la congruencia conserva la simetría. Dado que la matriz A es simétrica, para que B sea congruente con ella también ha de ser simétrica y así necesariamente $b = 2$.

Ahora dos matrices simétricas con coeficientes reales son congruentes si y sólo si al ser diagonalizacas por congruencia en la forma diagonal de ambas aparecen exactamente el mismo número de signos positivos y negativos.

Comenzamos diagonalizando por congruencia la matriz A, es decir mediante operaciones elementales fila y exactamente las mismas en columna:

$$A \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}} \xrightarrow{\mu_{32}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)} \xrightarrow{\mu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

Por tanto los signos de la forma diagonal de A son $\begin{cases} (+,+,+) \text{ si } a > 2 \\ (+,+,0) \text{ si } a = 2 \\ (+,+,-) \text{ si } a < 2 \end{cases}$

Ahora diagonalizamos la matriz B:

$$B \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-2)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & c-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)} \xrightarrow{\mu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c-2 \end{pmatrix}$$

Los signos de la forma diagonal de C son $\begin{cases} (+,+,+) \text{ si } c > 2 \\ (+,+,0) \text{ si } c = 2 \\ (+,+,-) \text{ si } c < 2 \end{cases}$.

Concluimos que son congruentes si y sólo si $b = 2$ y, $a, c > 2$ ó $a, c = 2$ ó $a, c < 2$. Dicho de otra manera son congruentes si y sólo si $b = 2$ y $signo(a-2) = signo(c-2)$.

(ii) *Estudiar para que valores de a existe una matriz inversible P tal que $PAP^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. En tales casos calcular P.*

La transformación PAP^t corresponde a la relación de congruencia.

La matriz indicada ya es diagonal y salvo orden los signos que aparecen en la misma son $(+,+,0)$. Vimos en el apartado anterior que en la forma diagonal de A esos signos aparecen si y sólo si $a-2=0$, es decir, si $a = 2$.

Para hallar la matriz P primero seguimos modificando por congruencia la forma diagonal de A hasta llegar exactamente a la diagonal indicada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{13}} \xrightarrow{\mu_{13}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3(2)} \xrightarrow{\mu_3(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz P es la que refleja las operaciones fila que hay que hacer para transformar A en la diagonal. Para hallarla realizamos sobre la identidad las operaciones fila hechas en el proceso de diagonalización:

$$Id \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{13}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3(2)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

(1.2 puntos)

3.– *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ dos matrices. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $rango(A) + rango(B) = 199$ entonces A y B no son equivalentes por filas.*

VERDADERO. Por reducción al absurdo. Si fuesen equivalentes por filas entonces tienen el mismo rango y:

$$rango(A) + rango(B) = rango(A) + rango(A) = 2rango(A)$$

y por tanto es imposible que la suma sea 199 impar.

(ii) *Si A y B son equivalentes por filas y tienen rango m entonces son equivalentes por columnas.*

FALSO. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son matrices 2×1 de rango 1 equivalentes por filas, pero no equivalentes por columnas.

(iii) *Si A y B son equivalentes por filas entonces $A + B$ y $A - B$ son equivalentes por filas.*

FALSO. Por ejemplo si $n = m = 2$ y $A = B = Id$ entonces obviamente A y B son equivalentes por filas por ser la misma matriz, pero $A + B = 2Id$ tiene rango 2 y no puede ser por tanto equivalente por filas a $A - B = 0$ que tiene rango 0, ya que la equivalencia por filas conserva el rango.

(iv) *$rango(AB) = rango(BA)$.*

FALSO. Por ejemplo si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y así $rango(AB) = 1 \neq 0 = rango(BA)$.

(1.2 puntos)

4.– *Dado $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:*

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} 2 \text{ si } i > j \\ \\ 1 \text{ si } i \leq j \end{cases}$$

(i) *Escribir la matriz P_4.*

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Hallar el determinante de P_4.*

Lo hallaremos en general en el apartado siguiente.

(iii) *Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$, $traza(P_n)$, $det(P_n^{2020})$.*

La matriz es:

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante restamos el doble de la primera fila a todas las demás:

$$det(P_n) = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}$$

En particular para $n = 4$, $det(P_4) = (-1)^{4-1} = -1$.

La traza es la suma de los términos de la diagonal:

$$traza(P_n) = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ veces}} = n.$$

Finalmente por las propiedades del determinante:

$$det(P_n^{2020}) = det(P_n)^{2020} = ((-1)^{n-1})^{2020} = (-1)^{2020(n-1)} = 1.$$

(1 punto)

5.– *En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, se consideran los subespacios vectoriales:*

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(-1) = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{x^2\}$$

(i) *Demostrar que U y V son suplementarios.*

Para que U y V sean suplementarios tienen que cumplir:

$$U + V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \text{ y } U \cap V = \{0\}.$$

Equivalentemente $dim(U + V) = dim(U) + dim(V) = dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) = 3$.

Identificamos las ecuaciones de U respecto de la base canónica para calcular su dimensión y generadores. La base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es:

$$C = \{1, x, x^2\}$$

de manera que un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ tiene coordenadas $(a_0, a_1, a_2)_C$ en tal base. Entonces $p(x) \in U$ si $p(-1) = 0$; equivalentemente si:

$$a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 = 0 \iff a_0 - a_1 + a_2 = 0.$$

La ecuación implícita de U respecto de la base canónica es $a_0 - a_1 + a_2 = 0$. Así:

$$dim(U) = \text{n}^o \text{ de parámetros} = dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) - \text{n}^o \text{ de ecuaciones} = 3 - 1 = 2.$$

Las paramétricas son:

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = \alpha + \beta, \quad a_2 = \beta.$$

y finalmente $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0)_C, (0, 1, 1)_C\}$.

El subespacio V está generado por un sólo vector, por tanto $dim(V) = 1$. En particular expresando su generador en coordenadas respecto de la base canónica se tiene: $V = \mathcal{L}\{(0, 0, 1)_C\}$.

Ya podemos ver una de las condiciones necesarias para ser suplementarios:

$$dim(U) + dim(V) = 2 + 1 = 3 = dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})).$$

Ahora calculamos $dim(U+V)$. Tal dimensión es el rango de la matriz que forman los generadores del subespacio suma; estos son la unión de los generadores de cada uno de los subespacios que sumamos:

$$dim(U+V) = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Concluimos que efectivamente son subespacios suplementarios.

(ii) *Calcular la matriz asociada respecto de la base canónica a la aplicación proyección sobre U paralelamente a V.*

Consideramos la base formada combinando bases de cada uno de los dos subespacios:

$$B = \{\underbrace{(1,1,0)_C, (0,1,1)_C}_{U}, \underbrace{(0,0,1)_C}_{V}\}$$

El hecho de ser suplementarios garantiza que B así construída es base de todo el espacio.

La matriz asociada a la proyección respecto de la base B es:

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente realizamos un cambio de base:

$$P_C = M_{CB} P_B M_{BC} = M_{CB} P_B M_{CB}^{-1}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos:

$$P_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) *Calcular el polinomio proyección de $(1-x)^2$ sobre V paralelamente a U.*

Por ser U y V espacios suplementarios cualquier polinomio $p(x)$ se descompone como:

$$p(x) = q(x) + r(x)$$

con $q(x) \in U$ proyección de $p(x)$ sobre U paralelamente a V y $r(x) \in V$ proyección de $p(x)$ sobre V paralelamente a U.

En nuestro caso nos piden la segunda proyección y la matriz hallada en (ii) nos permite calcular rápidamente la primera:

$$r(x) = p(x) - q(x)$$

donde $p(x) = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2 = (1,-2,1)_C$. Para hallar $q(x)$ usamos la matriz de la proyección sobre U, P_C:

$$P_C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Resulta $q(x) = (1,-2,-3)_C = 1 - 2x - 3x^2$ y en definitiva:

$$r(x) = p(x) - q(x) = 1 - 2x + x^2 - (1 - 2x - 3x^2) = 4x^2.$$

(1.2 puntos)

6.– *En el espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los conjuntos:*

$$U = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | rango(A) \leq 1\}$$
$$V = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A = A^t\}$$

(i) *Justificar si los conjuntos anteriores son o no subespacios vectoriales de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*

U no es subespacio ya que si tomamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene que $rango(A) = rango(B) = 1$ y por tanto $A, B \in U$. Sin embargo $A + B = Id$ y $rango(A + B) = rango(Id) = 2$ y entones $A + B \notin U$.

V es subespacio general porque es la envolvente lineal de un conjunto de vectores y sabemos que en general una envolvente lineal siempre es un subespacio vectorial.

Finalmente veamos que W si es subespacio. Tenemos que comprobar:

- $\Omega \in W$ (donde Ω es la matriz nula). Cierto porque $\Omega = \Omega^t$.

- Si $A, B \in W$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha A + \beta B \in W$.

Pero $A, B \in W$ significa que $A = A^t$ y $B = B^t$. Entonces:

$$(\alpha A + \beta B)^t = (\alpha A)^t + (\beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t = \alpha A + \beta B$$

y por tanto $\alpha A + \beta B \in W$.

(ii) *Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de W y $V \cap W$ respecto de la base canónica.*

La base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es:

$$\hat{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

de forma que una matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tiene coordenadas $(x, y, z, t)_{\hat{C}}$ en tal base.

Ahora $A \in W$ si y sólo si $A = A^t$ es decir:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^t \iff \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \iff y = z$$

Por tanto la ecuación implícita de W respecto de la base canónica es:

$$y - z = 0.$$

Además:

$$dim(W) = \text{n}^o \text{ de parámetros} = dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) - \text{n}^o \text{ de ecuaciones} = 4 - 1 = 3.$$

Resolviendo paramétricamente la ecuación implícita obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= b \\ z &= b \\ t &= c \end{aligned}$$

Para hallar las ecuaciones de $V \cap W$ usaremos las ecuaciones implícitas de ambos subespacios. Comenzamos calculando las paramétricas de V:

$$V = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{(1,1,1,1)_{\hat{C}}, (1,-1,1,-1)_{\hat{C}}, (0,1,0,1)_{\hat{C}}\}.$$

Eliminamos los vectores dependientes entres sus generadores escalonando la matriz que forman sus coordenadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{13}(-1)}{\longrightarrow} \overset{H_{12}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Concluimos que:

$$V = \mathcal{L}\{(1,0,1,0)_{\hat{C}}, (0,1,0,1)_{\hat{C}}\}$$

Las ecuaciones paramétricas de V son:

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= b \\ z &= a \\ t &= b \end{aligned}$$

El número de ecuaciones implícitas es

$$dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}) - \text{n}^o \text{ de parámetros} = 4 - 2 = 2.$$

Las obtenemos eliminando parámetros:

$$\begin{aligned} x - z &= 0 \\ y - t &= 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas de $V \cap W$ se obtienen uniendo las ecuaciones de ambos subespacios:

$$V \begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases}$$
$$W \left\{ y - z = 0 \right.$$

Comprobamos si son independientes escalonando la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{H_{3}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Son independientes y quedan:

$$\begin{aligned} x - z &= 0 \\ y - t &= 0 \\ z - t &= 0 \end{aligned}$$

El número de parámetros es:

$$dim(V \cap W) = \text{n}^o \text{ de parámetros} = dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})) - \text{n}^o \text{ de ecuaciones} = 4 - 3 = 1.$$

Resolviendo las implícitas obtenemos las ecuaciones paramétricas.

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= a \\ z &= a \\ t &= a \end{aligned}$$

(iii) *Hallar* $dim(V+W)$.

Por la fórmula de las dimensiones:

$$dim(V+W) = dim(V) + dim(W) - dim(V \cap W) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

(iv) *Encontrar una matriz* $C \in V$ *de manera que* W *y* $\mathcal{L}\{C\}$ *sean suplementarios. Justificar la respuesta.*

Tenemos que $dim(W) = 3$. Para que un subespacio W' de dimensión 1 (generado por un elemento) sea suplementario con W tiene que cumplir dos condiciones. La primera es que $dim(W) + dim(W') = dim(M_{2\times 2})(\mathbb{R}) = 4$. Pero es evidente que se cumple.

La segunda es que $dim(W + W') = 4$. Para garantizar esto basta tomar un generador $C \in V$ que NO esté en W; dado que W estaba formado por las matrices simétricas (las que cumplen $A = A^t$). Entonces escogemos una matriz C en V que no sea simétrica, por ejemplo:

$$C = (0,1,0,1)_{\hat{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1.2 puntos)

7.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se consideran los vectores:*

$$B = \{(0,1,0), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

(i) *Probar que* B *es una base de* $\mathbb{R}^3$.

Dado que $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ y B tiene tres vectores, para comprobar que forman base es suficiente verificar que los vectores son independientes. Equivalentemente que el rango de la matriz de coordenadas es 3:

$$rango \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

(ii) *Si* $x' + y' - z' = 0$ *es la ecuación implícita respecto de la base* B *de un subespacio* U *de* $\mathbb{R}^3$*, hallar las ecuaciones paramétricas de* U *en la base canónica.*

Primero hallamos las ecuaciones paramétricas de U en la base B, resolviendo su ecuación implícita en función de $3 - 1 = 2$ parámetros:

$$x' = \alpha, \qquad y' = \beta, \qquad z' = \alpha + \beta.$$

Deducimos que:

$$U = \mathcal{L}\{(1,0,1)_B, (0,1,1)_B\}.$$

Cambiamos de base los generadores:

$$M_{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_C, \qquad M_{CB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_C$$

De donde:

$$U = \mathcal{L}\{(0,2,1)_C, (1,2,1)_C\}.$$

y las paramétricas de U en la base canónica son:

$$x = \beta, \qquad y = 2\alpha + 2\beta, \qquad z = \alpha + \beta.$$

(iii) *Si* $B' = \{(1,1,1),(1,2,3),(0,0,4)\}$ *y un vector* $\vec{u}$ *tiene coordenadas* $(a,b,c)_{B'}$ *en la base* B' *hallar las coordenadas de* $\vec{u}$ *en la base* B.

Basta calcular la matriz de cambio de base $M_{BB'}$. Pero sabemos que:

$$M_{BB'} = M_{BC}M_{CB'} = (M_{CB})^{-1}M_{CB'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

y así:

$$M_{BB'} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} -a-2b-4c \\ a+b \\ a+3b+4c \end{pmatrix}_B$$

es decir:

$$(a,b,c)_{B'} = (-a-2b-4c, a+b, a+3b+4c)_B.$$

(1 punto)

8.– *Dado* $a \in \mathbb{R}$ *se define el endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$,

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (x+y+z, x+y+az, x+y+z)$$

(i) *Hallar la matriz* F_C *asociada a* f *respecto de la base canónica.*

Simplemente trasladando coeficientes:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) *Estudiar para que valores de* a *la aplicación es diagonalizable y/o triangularizable.*

La matriz triangulariza si la suma de las multiplicidades algebraicas coincide con la dimensión del espacio, es decir, es $dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Diagonaliza si además la multiplicidad algebraica de cada autovalor coincide con la geométrica.

Para analizar todo esto comenzamos calculando el polinomio característico. Sus raíces son los autovalores.

$$|F_C - \lambda Id| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & a \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1-\lambda & a \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & a+1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda((1-\lambda)(2-\lambda)-(a+1)) = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda - a + 1).$$

Tenemos garantizado que un autovalor es $\lambda_1 = 0$. Resolvemos la ecuación $\lambda^2 - 3\lambda - a + 1 = 0$ para factorizarlo y hallar otros posibles autovalores:

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5+4a}}{2}$$

Distinguimos entonces varios casos dependiendo de el número de soluciones de la ecuación de segundo grado.

- Si $5+4a<0$, es decir, si $a<-\dfrac{5}{4}$ entonces la ecuación de segundo grado no tiene soluciones reales. El único autovalor es $\lambda_1=0$ con multiplicidad algebraica 1. En este caso ni diagonaliza ni triangulariza.

- Si $5+4a=0$, es decir, si $a=-\dfrac{5}{4}$ la ecuación de segundo grado tiene una raíz doble $\lambda_2=3/2$. Es decir:

$$|F_C-\lambda Id|=-\lambda(\lambda-3/2)^2.$$

Los autovalores son:

$\lambda_1=0$ con multiplicidad algebraica 1.

$\lambda_2=3/2$ con multiplicidad algebraica 2.

La suma de algebraicas es $1+2=3$ y por tanto triangulariza.

Para ver si diagonaliza analizamos las multiplicidades geométricas. Recordemos que $1\leq m.g.\leq m.a.$

Dado que $m.a(0)=1$ la geométrica automáticamente es $m.g(0)=1$. Coinciden.

Para $\lambda_2=3/2$ tenemos:

$$m.g(3/2)=3-rango(F_C-(3/2)Id)=3-rango\begin{pmatrix}-1/2 & 1 & 1\\ 1 & -1/2 & 5/4\\ 1 & 1 & -1/2\end{pmatrix}=3-2=1\neq m.a(3/2)$$

No coinciden las multiplicidades y entonces en este caso NO diagonaliza.

- Si $5+4a>0$, es decir, $a>-\dfrac{5}{4}$ entonces la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones disintas:

$$\lambda_2=\frac{3-\sqrt{5+4a}}{2},\qquad \lambda_3=\frac{3+\sqrt{5+4a}}{2}$$

Hay que comprobar si alguna puede coincide con la primera que ya teníamos $\lambda_1=0$:

$$\lambda_2=0\iff 3-\sqrt{5+4a}=0\iff a=1.$$

Entonces separamos en dos casos.

– Si $a>-\dfrac{5}{4}$ y $a\neq 1$ entonces hay tres autovalores distintos con multiplicidad algebraica uno (y por tanto también geométrica). Entonces el endomorfismo triangulariza y diagonaliza.

– Si $a=1$ hemos visto que:

$$|F_c-\lambda Id|=-\lambda^2(\lambda-3)$$

Los autovalores son:

$\lambda_1=0$ con multiplicidad algebraica 2.

$\lambda_2=3$ con multiplicidad algebraica 1.

Para el segundo como la algebraica es 1 la geométrica también.

Para el primero:

$$m.g(0)=3-rango(F_C-0\cdot Id)=3-rango\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=3-1=2\neq m.a(0)$$

y por tanto las multiplicidades coinciden y diagonaliza.

En resumen:

- Triangulariza y diagonaliza si $a>-\dfrac{5}{4}$.

- Triangulariza y no diagonaliza si $a = -\dfrac{5}{4}$.

- Ni triangulariza ni diagonaliza si $a < -\dfrac{5}{4}$.

(iii) *Para $a = -2$ calcular los autovectores de f.*

En el apartado anterior vimos que para $a = -2 < -5/4$ el único autovalor es $\lambda_1 = 0$. Calculamos sus autovalores asociados:

$$(F_C - 0Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0,\, x + y - 2z = 0.$$

Resolviendo paramétricamente se obtiene:

$$x = \alpha, \quad y = -\alpha, \quad z = 0.$$

y así:

$$S_0 = \mathcal{L}\{(1, -1, 0)\}$$

(iv) *Para $a = 1$ hallar una base B en la cual la matriz asociada F_B sea diagonal.*

Para $a = 1$ vimos en el apartado (i) que la matriz diagonaliza. La base B respecto a la cuál la matriz asociada a la diagonal es la formada por los autovectores. Procedemos a calcularlos.

Los autovalores eran (visto en (i)), $\lambda_1 = 0$ con multiplicidad geométrica 2 y $\lambda_2 = 3$ con multiplicidad geométrica 1.

Empezamos con los autoectores asociados a $\lambda_1 = 0$.

$$(F_C - 0Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0$$

Resolviendo paramétricamente se obtiene:

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = -\alpha - \beta.$$

y así:

$$S_0 = \mathcal{L}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1\}$$

Ahora los autovectores asociados a $\lambda_2 = 3$:

$$(F_C - 3Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -2x + y + z = 0,\, x - 2y + z = 0.$$

Resolviendo paramétricamente se obtiene:

$$x = \alpha, \quad y = \alpha, \quad z = \alpha.$$

y así:

$$S_3 = \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$$

Concluimos que una base de autovectores es:

$$B = \{\underbrace{(1, 0, -1), (0, 1, -1)}_{\lambda_1 = 0}, \underbrace{(1, 1, 1)}_{\lambda_2 = 3}\}.$$

respecto a la cuál la matriz asociada es:

$$F_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(v) *Para $a = 5$ calcular traza F_C^{11}.*

Para $a = 5 > 5/4$ sabemos que diagonaliza. La traza de la matriz asociada a un endomorfismo se conserva por cambio de base, luego la traza de la potencia pedida coincide con la traza de la potencia de la matriz diagonal, es decir, con la suma de las potencias de los autovalores:

$$traza(F_C)^{11} = \lambda_1^{11} + \lambda_2^{11} + \lambda_3^{11}$$

Vimos en (i) que los autovalores eran respectivamente $0, 4, -1$. Queda entonces:

$$traza(F_C)^{11} = 0^{11} + 4^{11} + (-1)^{11} = 4^{11} - 1.$$

(1.3 puntos)

9.– *De un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se sabe que $ker(f) = Im(f)$. Justificar razonadamente que f no puede ser diagonalizable.*

Razonamos por reducción al absurdo. Si fuese diagonalizable existiría una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ de autovectores en la cual la matriz asociada es diagonal:

$$F_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Ahora por la fórmula de las dimensiones:

$$2 = dim(\mathbb{R}^2) = dim(im(f)) + dim(ker(f)) = 2dim(im(f)) \Rightarrow dim(Im(f)) = dim(ker(f)) = 1.$$

La dimensión de la imagen es el rango de la matriz asociada. Si $rango(F_B) = 1$ entonces alguno de los dos autovalores es nulo y el otro no. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$.

En ese caso el núcleo estaría formado por los vectores $(x, y)_B$ tales que:

$$F_B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \lambda_2 y = 0 \iff y = 0.$$

Es decir:

$$ker(F_B) = \mathcal{L}\{(1, 0)_B\}$$

La imagen está generada por las columnas de la matriz asociada:

$$Im(F_B) = \mathcal{L}\{(0, \lambda_2)_B\} = \mathcal{L}\{(0, 1)_B\}$$

Pero entonces núcleo e imagen no coinciden lo cuál contradice las hipótesis iniciales.

(0.9 punto)
