Álgebra Lineal I **Examen Final**

Ejercicio único (3 horas) **9 de enero de 2020**

1.– Tenemos siete sobres y siete tarjetas de siete colores distintos.

(i) ¿De cuántas formas pueden distribuirse las tarjetas en los sobres de manera que en cada sobre se introduce una tarjeta?. ¿En cuántas de ellas exactamente cinco sobres llevan la tarjeta de su color?.

(ii) ¿De cuántas formas distintas puede distribuirse las tarjetas si pueden ir varias en un mismo sobre y quedar sobres vacíos?.

(1 punto)

2.– Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$.

(i) Estudiar para que valores de a, b, c las matrices A y B son congruentes.

(ii) Estudiar para que valores de a existe una matriz inversible P tal que $PAP^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. En tales casos calcular P.

(1.2 puntos)

3.– Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ dos matrices. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) Si $rango(A) + rango(B) = 199$ entonces A y B no son equivalentes por filas.

(ii) Si A y B son equivalentes por filas y tienen rango m entonces son equivalentes por columnas.

(iii) Si A y B son equivalentes por filas entonces $A + B$ y $A - B$ son equivalentes por filas.

(iv) $rango(AB) = rango(BA)$.

(1.2 puntos)

4.– Dado $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} 2 \text{ si } i > j \\ \\ 1 \text{ si } i \leq j \end{cases}$$

(i) Escribir la matriz P_4.

(ii) Hallar el determinante de P_4.

(iii) Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$, $traza(P_n)$, $det(P_n^{2020})$.

(1 punto)

5.– En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(-1) = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{x^2\}$$

(i) Demostrar que U y V son suplementarios.

(ii) Calcular la matriz asociada respecto de la base canónica a la aplicación proyección sobre U paralelamente a V.

(iii) Calcular el polinomio proyección de $(1-x)^2$ sobre V paralelamente a U. (1.2 puntos)

6.– En el espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los conjuntos:

$$U = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | rango(A) \leq 1\}$$
$$V = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A = A^t\}$$

(i) Justificar si los conjuntos anteriores son o no subespacios vectoriales de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de W y $V \cap W$ respecto de la base canónica.

(iii) Hallar $dim(V + W)$.

(iv) Encontrar una matriz $C \in V$ de manera que W y $\mathcal{L}\{C\}$ sean suplementarios. Justificar la respuesta.

(1.2 puntos)

7.– En $\mathbb{R}^3$ se consideran los vectores:

$$B = \{(0,1,0), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

(i) Probar que B es una base de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Si $x' + y' - z' = 0$ es la ecuación implícita respecto de la base B de un subespacio U de $\mathbb{R}^3$, hallar las ecuaciones paramétricas de U en la base canónica.

(iii) Si $B' = \{(1,1,1), (1,2,3), (0,0,4)\}$ y un vector $\vec{u}$ tiene coordenadas $(a,b,c)_{B'}$ en la base B' hallar las coordenadas de $\vec{u}$ en la base B.

(1 punto)

8.– Dado $a \in \mathbb{R}$ se define el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$,

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (x+y+z, x+y+az, x+y+z)$$

(i) Hallar la matriz F_C asociada a f respecto de la base canónica.

(ii) Estudiar para que valores de a la aplicación es diagonalizable y/o triangularizable.

(iii) Para $a = -2$ calcular los autovectores de f.

(iv) Para $a = 1$ hallar una base B en la cual la matriz asociada F_B sea diagonal.

(v) Para $a = 5$ calcular traza F_C^{11}.

(1.3 puntos)

9.– De un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se sabe que $ker(f) = Im(f)$. Justificar razonadamente que f no puede ser diagonalizable.

(0.9 punto)

Álxebra Lineal I		**Exame Final**
Exercicio único	(3 horas.)	**9 de xaneiro de 2020**

1.– Temos sete sobres e sete tarxetas de sete cores distintas.

(i) De cantas formas poden distribuirse as tarxetas nos sobres de maneira que en cada sobre se introduce unha tarxeta?. En cantas delas exactamente cinco sobres levan a tarxeta da súa cor?.

(ii) De cantas formas distintas poden distribuirse as tarxetas si poden ir varias nun mesmo sobre e quedar sobres vacíos?.

(1 punto)

2.– Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$.

(i) Estudiar para que valores de a, b, c as matrices A e B son congruentes.

(ii) Estudiar para que valores de a existe unha matriz inversible P tal que $PAP^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. En tales casos calcular P.

(1.2 puntos)

3.– Sexan $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ dúas matrices. Razoar a veracidade ou falsedade das seguintes afirmacions:

(i) Se $rango(A) + rango(B) = 199$ entón A e B non son equivalentes por filas.

(ii) Se A e B son equivalentes por filas e teñen rango m entón son equivalentes por columnas.

(iii) Se A e B son equivalentes por filas entonces $A + B$ e $A - B$ son equivalentes por filas.

(iv) $rango(AB) = rango(BA)$.

(1.2 puntos)

4.– Dado $n \in \mathbb{N}$ se define a matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} 2 \text{ si } i > j \\ \\ 1 \text{ si } i \leq j \end{cases}$$

(i) Escribir a matriz P_4.

(ii) Atopar o determinante de P_4.

(iii) Para cualquier $n \geq 2$, atopar $det(P_n)$, $traza(P_n)$, $det(P_n^{2020})$.

(1 punto)

5.– No espazo vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grao menor ou igual que 2 con coeficientes reais, se consideran os subespazos vectoriais:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(-1) = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{x^2\}$$

(i) Demostrar que U e V son suplementarios.

(ii) Calcular a matriz asociada respecto da base canónica á aplicación proxección sobre U paralelamente a V.

(iii) Calcular o polinomio proxección de $(1-x)^2$ sobre V paralelamente a U. (1.2 puntos)

6.– No espazo vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran os conxuntos:

$$U = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | rango(A) \leq 1\}$$
$$V = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$
$$W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A = A^t\}$$

(i) Xustificar se os conxuntos anteriores son ou non subespazos vectoriais de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Atopar as ecuacions paramétricas e implícitas de W e $V \cap W$ respecto da base canónica.

(iii) Atopar $dim(V+W)$.

(iv) Encontrar unha matriz $C \in V$ de xeito que W e $\mathcal{L}\{C\}$ sexan suplementarios. Xustificar a resposta.

(1.2 puntos)

7.– En $\mathbb{R}^3$ se consideran os vectores:

$$B = \{(0,1,0), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

(i) Probar que B é unha base de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Se $x' + y' - z' = 0$ é a ecuación implícita respecto da base B dun subespazo U de $\mathbb{R}^3$, atopar as ecuacións paramétricas de U na base canónica.

(iii) Se $B' = \{(1,1,1), (1,2,3), (0,0,4)\}$ e un vector $\vec{u}$ ten coordenadas $(a,b,c)_{B'}$ na base B' atopar as coordenadas de $\vec{u}$ na base B.

(1 punto)

8.– Dado $a \in \mathbb{R}$ se define o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$,

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (x+y+z, x+y+az, x+y+z)$$

(i) Atopar a matriz F_C asociada a f respecto da base canónica.

(ii) Estudiar para que valores de a a aplicación é diagonalizable e/ou triangularizable.

(iii) Para $a = -2$ calcular os autovectores de f.

(iv) Para $a = 1$ atopar unha base B na cal a matriz asociada F_B sexa diagonal.

(v) Para $a = 5$ calcular traza F_C^{11}.

(1.3 puntos)

9.– Dun endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se sabe que $ker(f) = Im(f)$. Xustificar razoadamente que f non pode ser diagonalizable.

(0.9 punto)
