Álgebra Lineal I | **Examen Final**

Ejercicio único (3 horas) **27 de julio de 2024**

1.– *Nueve amigos van de viaje llevando para ello dos coches, uno de cuatro plazas y otro de cinco.*

(i) *¿De cuántas formas pueden distribuirse en los dos coches si todos tienen carnet de conducir?*

Para elegir el conductor del coche de cuatro plazas hay 9 opciones (cualquiera de los amigos); después para sus acompañantes hay que contar las formas de elegir 3 elementos distintos de entre los 8 amigos restantes, sin importar el orden. Son combinaciones sin repetición de 8 elementos tomados de 3 en 3: $C_{8,3} = \binom{8}{3}$.

Finalmente para el conductor del coche de cinco plazas se puede elegir a uno de los 5 amigos restantes, y se completará con las personas que no han sido seleccionadas hasta ahora. En total:

$$9 \cdot \binom{8}{3} \cdot 5 = 9 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 5 = 2520.$$

(ii) *¿De cuántas formas pueden distribuirse en los dos coches si sólo tres tienen carnet de conducir?*

Ahora para elegir el conductor del coche de cuatro plazas hay 3 opciones y para el conductor del segundo coche cualqueira de los 2 restantes. Después para los pasajeros del coche de 4 plazas, hay que contar las formas de elegir 3 elementos distintos de entre los 7 amigos restantes, sin importar el orden. Son combinaciones sin repeteción de 7 elementos tomados de 3 en 3: $C_{7,3} = \binom{7}{3}$.

En total:

$$3 \cdot 2 \cdot \binom{7}{3} = 6 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 210.$$

(**Nota:** *sólo interesa distinguir quienes van en cada coche y cuál es el conductor, pero no en que asientos se sienta cada uno.*)

2.– *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se define la matriz 4×4:*

$$A = \begin{pmatrix} b & b & b & a \\ b & b & a & b \\ b & a & b & b \\ a & b & b & b \end{pmatrix}$$

(i) *Calcular $det(A)$ y $traza(A)$ en función de a y b.*

Para calcular el determinantes comenzamos sumando a la primera fila todas las demás. Sabemos que el determinante no varía:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3b+a & 3b+a & 3b+a & 3b+a \\ b & b & a & b \\ b & a & b & b \\ a & b & b & b \end{vmatrix} = (3b+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & b & a & b \\ b & a & b & b \\ a & b & b & b \end{vmatrix}$$

Ahora restamos la primera fila multiplicada por b a las demás:

$$|A| = (3b+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ a-b & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Cambiamos de orden la primera y cuarta fila y la segunda y tercera (cada cambio supone invertir el signo; al hacer dos queda igual):

$$|A| = (3b+a)\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3b+a)(a-b)^3$$

La traza es la suma de los elementos de la diagonal:

$$traza(A) = b+b+b+b = 4b.$$

(ii) *Estudiar el rango de A en función de los valores de a y b.*

Si el determinante es no nulo el rango es el máximo posible, como $det(A) = (3b+a)(a-b)^3$:

- Si $a \neq -3b$ y $a \neq b$ entonces $rango(A) = 4$.

- Si $a = b$ la matriz queda:

$$A = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

Tiene todas las filas iguales y por tanto el rango es 1 si $b \neq 0$ o 0 si $b = 0$.

- Si $a = -3b \neq 0$ podemos reproducir las operaciones hechas para hallar el determiante sumando a la primera fila las demás. Queda (poniendo $-3b$ en lugar de a:

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & -3b & b \\ b & -3b & b & b \\ -3b & b & b & b \end{pmatrix}$$

La primera fila no cuenta para el rango. La eliminamos. Podemos dividir la matriz por $b \neq 0$ y luego a la segunda y tercera fila respectivamente restarle la primera a la segunda y sumársela por tres a la tercera:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = 3$$

En resumen:

- Si Si $a \neq -3b$ y $a \neq b$ entonces $rango(A) = 4$.

- Si $a = -3b \neq 0$, entonces $rango(A) = 3$.

- Si $a = b \neq 0$, entonces $rango(A) = 1$.

- Si $a = b = 0$, entonces $rango(A) = 0$.

(iii) *Hallar a y b para que $det(AA^t) = 0$.*

Se tiene que $det(AA^t) = det(A)det(A^t) = det(A^2) = 0$. Por tanto se trata de hallar a para que $det(A) = 0$. Según vimos en el primer apartado esto equivale a:

$$(a+3b)(a-b)^3 = 0$$

es decir $a = -3b$ ó $a = b$.

3.– *Dar tres matrices distintas $A, B, C \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y no diagonales tales que A y B sean congruentes y equivalentes por filas y A y C sean equivalentes por filas pero no congruentes. Justifica la respuesta.*

Dos matrices cuadradas inversibles siempre son equivalentes por filas. Así que basta tomar como A y B, dos matrices congruentes inversibles distintas y no diagonales. Para garantizar que sean congruentes partimos de la misma matriz, por ejemplo la identidad, y la transformamos de dos maneras diferentes haciendo operaciones fila y las mismas en columnas:

$$Id \overset{H_{21}(1)\mu_{21}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

$$Id \overset{H_{21}(2)\mu_{21}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Para la matriz C basta tomar una matriz inversible y por tanto será también equivalente por filas a cualquier otra inversible (en particular a A) pero que no sea simétrica (y eso garantiza que no es congruente con A, porque la congruencia conserva la simetría:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.– *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar los valores de a y b para los cuales A y B son

En cualquiera de los cuatro casos una condición necesaria (aunque no suficiente) para que cumplan la relación pedida es que tengan el mismo rango, porque todas ellas lo conservan. Tenemos que:

$$rango(B) = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Por tanto A no puede tener rango 2 y su determinante ha de ser nulo:

$$0 = |A| = b - 2a \quad \Rightarrow \quad b = 2a.$$

(i) *Equivalentes por filas.*

Son equivalentes por filas si y sólo si tienen la misma forma canónica reducida por filas (escalonada, con los pivotes iguales a uno, y encima y debajo de ellos sólo ceros). Reducimos la matriz B:

$$B \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 2a \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que sean equivalentes por filas ambas formas reducidas han de coincidir, es decir, $a = 1$ y por tanto $b = 2a = 2$.

(ii) *Equivalentes por columnas.*

Lo análogo pero con operaciones elementales columna. Primero la matriz B:

$$B \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 2a \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(-a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las formas canónicas reducidas por columnas difieren: nunca son equivalentes por columnas.

(iii) *Equivalentes.*

Son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango. Vimos que eso ocurre cuando $b = 2a$.

(iv) *Congruentes. En este caso dar además un matriz inversible P tal que $P^tAP = B$.*

Dado que B es simétrica, para que sean congruentes como condición necesaria (aunque no suficiente) A tiene que ser también simétrica y por tanto $a = 2$ y $b = 2a = 4$. Pero para que definitivamente sean congruentes al diagonalizarlas haciendo las mismas operaciones fila y columna tienen que aparecer los mismos signos en la diagonal:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Por tanto son congruentes para $a = 2$ y $b = 4$.

Para hallar la matriz P hacemos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hicimos para pasar de A a R y la inversa y en orden opuesto de las que hicimos para pasar de B a R:

$$Id \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(\mu_{21}(-1))^{-1}=\mu_{21}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

(1.2 puntos)

5.– *Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) *Dos matrices simétricas e inversibles de tamaño 3×3 con traza cero son congruentes.*

FALSO. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tienen traza cero y son inversibles, pero no son congruentes porque ya son diagonales y no aparece el mismo número de signos positivos y negativos en la diagonal.

(ii) *Si V es un espacio vectorial con $dim(V) = 2025$ y $S_1, S_2 \subset V$ son subespacios con $dim(S_1) = 2000$ y $dim(S_1 \cap S_2) = 1000$, entonces $dim(S_2) \leq 1025$.*

VERDADERO. Por la fórmula de las dimensiones:

$$\begin{aligned} dim(S_2) &= dim(S_1 + S_2) - dim(S_1) + dim(S_1 \cap S_2) = \\ &= dim(S_1 + S_2) - 2000 + 1000 = dim(S_1 + S_2) - 1000 \end{aligned}$$

y como $S_1 + S_2 \subset V$,

$$dim(S_2) = dim(S_1 + S_2) - 1000 \leq dim(V) - 1000 = 2025 - 1000 = 1025.$$

(iii) *Dados $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ no nulos y distintos, los vectores $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ y $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ son linealmente independientes.*

FALSO. Por ejemplo $\vec{u}_1 = (1, 0)$ y $\vec{u}_2 = (2, 0)$. Pero los vectores $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (3, 0)$ y $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = (-1, 0)$ son DEPENDIENTES.

(0.9 puntos)

6.– *Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual que 2. Sean:*

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \qquad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p'(0) = 0\}$$

(i) *Demostrar que V es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Para ver que es subespacio hay que comprobar:

i) $p_0(x) = 0$ pertenece a V.

ii) Si $p(x), q(x) \in V$ entonces $ap(x) + bq(x) \in V$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

i) Si $p_0(x) = 0$ entonces $p_0'(x) = 0$ y en particular $p_0'(0) = 0$ y por tanto $p_0(x) \in V$.

ii) Si $p(x), q(x) \in V$, significa que $p'(0) = q'(0) = 0$. Como $(ap(x) + bq(x))' = ap'(x) + bq'(x)$:

$$ap'(0) + bq'(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

y por tanto $ap(x) + bq(x) \in V$.

(ii) *Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas de $U \cap V$ respecto de la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Reinterpretamos como están definidos ambos subespacios en función de coordenadas respecto de la base canónica $C = \{1, x, x^2\}$. Un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ tienen coordenadas en esta base $p(x) \equiv (a_0, a_1, a_2)_C$.

$p(1) = 0$ equivale a $a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 0$, es decir, $a_0 + a_1 + a_2 = 0$.

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x$ y por tanto $p'(0) = 0$ equivale a $a_1 = 0$.

Entonces:

$$U = \{(a_0, a_1, a_2)_C \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | a_0 + a_1 + a_2 = 0\}, \qquad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | a_1 = 0\}$$

Las ecuaciones implícitas de la intersección se construyen uniendo las de ambas subespacios:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

Son claramente independientes porque no son proporcionales.

Tenemos que $dim(U \cap V) = dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) - \text{n}^o$ de ecuaciones $= 3 - 2 = 1$.

Por tanto para las paramétrias resolvemos en función de 1 parámetro. De la segunda ecuación $a_1 = 0$ y sustituyendo en la primera: $a_2 = -a_0$. Quedan:

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -\lambda \end{cases}$$

(iii) *Probar que $B = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Dado que $dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) = 3$ y B tiene tres vectores para que sean base basta comprobar que son independientes. Equivalentemente que sus coordenadas respecto a la base canónica forman una matriz de rango 3:

$$\begin{aligned} &1 \equiv (1, 0, 0)_C \\ &x - 1 \equiv (-1, 1, 0)_C \\ &(x-1)^2 = 1 - 2x + x^2 = (1, -2, 1)_C \end{aligned}$$

y $rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3$ (porque ya está escalonada y tiene tres filas no nulas).

(iv) *Hallar las ecuaciones implíctas de $U \cap V$ respecto de la base B.*

Tenemos la matriz de cambio de base:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que relaciona coordenadas $(b_0, b_1, b_2)_B$ en la base B y $(a_0, a_1, a_2)_C$ en la canónica:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = M_{CB} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Entonces las ecuaciones implícitas en la base canónica vimos que eran:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \iff (\,1 \quad 1 \quad 1\,) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_1 = 0 \iff (\,0 \quad 1 \quad 0\,) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

Sustituyendo:

$$(\,1 \quad 1 \quad 1\,) M_{CB} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \iff b_0 = 0$$

$$(\,0 \quad 1 \quad 0\,) M_{CB} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \iff b_1 - 2b_2 = 0$$

(v) *Dar las ecuaciones paramétricas de un subespacio W, tal que U y W sean suplementarios.*

Dado que U está definido por una sola ecuación tiene dimensión $dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) - 1 = 2$. La ecuación era $a_0 + a_1 + a_2 = 0$. Ponemos una variable en función de las otras dos:

$$a_2 = -a_0 - a_1$$

y tenemos las paramétricas:

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = \beta, \quad a_2 = -\alpha - \beta.$$

y de ahí los generadores:

$$U = \mathcal{L}\{(1, 0, -1)_C, (0, 1, -1)_C\}$$

Un espacio suplementario tendrá dimensión $dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) - dim(U) = 3 - 2 = 1$. Estará generado por un vector que junto con los dos de U generen todo $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, es decir, que el rango de la matriz que forman los tres sea 3. Basta tomar $(0, 0, 1)_C$ ya que la matriz que forman los tres sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de rango 3. Por tanto:

$$W = \mathcal{L}\{(0, 0, 1)_C\}$$

y sus paramétricas son:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \lambda.$$

(1.3 puntos)

7.– *Sea $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices cuadradas 2×2. Se consideran los subespacios vectoriales:*

$$U=\{A\in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})|traza(A)=0\},\quad V=\mathcal{L}\{Id\}$$

(i) *Probar que U y V son subespacios suplementarios.*

Antes de nada reescribimos los subespacios en términos de coordenadas y la base canónica:

$$C=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

de manera que una matriz $A=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ tiene coordenadas $(x,y,z,t)_C$ en esa base.

Entonces $traza(A)=x+t$ y así:

$$U=\{(x,y,z,t)_C\in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})|x+t=0\}$$

y

$$V=\mathcal{L}\{(1,0,0,1)_C\}.$$

Para que sean suplementarios tienen que cumplirse que:

i) $dim(U)+dim(V)=dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))=4$.

ii) $dim(U+V)=dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))=4$.

Pero:

$dim(U)=dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))-$ n^o de ecuaciones $=4-1=3$.

$dim(V)=1$ (porque está generado por un vector).

Por tanto (i) se cumple.

Para hallar $U+V$ necesitamos los generadores de U. Para ello pasamos de la implícita $x+t=0$ a paramétricas en función de $dim(U)=3$ parámetros.

$$x=\alpha,\quad y=\beta,\quad z=\gamma,\quad t=-\alpha$$

y así:

$$U=\mathcal{L}\{(1,0,0,-1)_C,(0,1,0,0)_C,(0,0,1,0)_C\}$$

Entonces:

$$U+V=\mathcal{L}\{\underbrace{(1,0,0,-1)_C,(0,1,0,0)_C,(0,0,1,0)_C}_{U},\underbrace{(1,0,0,1)_C}_{V}\}$$

y

$$dim(U+V)=rg\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}=4$$

y vemos que se cumple (ii).

(ii) *Calcular la proyección de la matriz $\begin{pmatrix}2&0\\2&5\end{pmatrix}$ sobre U paralelamente a V.*

Para ello escribiremos la matriz $\begin{pmatrix}2&0\\2&5\end{pmatrix}\equiv(2,0,2,5)_C$ en la base B formada por una base de U y otra de V.

$$B=\{\underbrace{(1,0,0,-1)_C,(0,1,0,0)_C,(0,0,1,0)_C}_{U},\underbrace{(1,0,0,1)_C}_{V}\}$$

Donde:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hacemos el cambio de base:

$$M_{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

y entonces:

$$(2,0,2,5)_C = \underbrace{-\frac{3}{2} \cdot (1,0,0,-1)_C + 0 \cdot (0,1,0,0)_C + 2 \cdot (0,0,1,0)_C}_{U} + \underbrace{\frac{7}{2} \cdot (1,0,0,1)_C}_{V}$$

y la proyección pedida es "el trozo" que está en U:

$$-\frac{3}{2} \cdot (1,0,0,-1)_C + 0 \cdot (0,1,0,0)_C + 2 \cdot (0,0,1,0)_C = (-3/2, 0, 2, 3/2)_C \equiv \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \\ 2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Dar una matriz no invertible cuya proyección sobre V paralelamente a U sea Id.*

Si la proyección sobre V paralelamente a U es Id la matriz pedida se escribe como:

$$B = C + Id$$

con $C \in U$, y por tanto verificando $traza(C) = 0$. Eso quiere decir que es de la forma $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$.

Entonces:

$$B = C + Id = \begin{pmatrix} x+1 & y \\ z & 1-x \end{pmatrix}$$

Para que sea no inversible su determinante tiene que ser nulo:

$$(x+1)(1-x) - yz = 0$$

Basta tomar por ejemplo,

$$x = 1, \quad y = z = 0.$$

y así la matriz pedida queda:

$$B = C + Id = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1.2 puntos)

8.– *De una aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *se sabe que,* $(1,1,1)$ *es un autovector,* $ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$ *y* $traza(F_C) = 2$. *Hallar la matriz* F_C *asociada a* f *respecto de la base canónica.*

Una aplicación lineal queda totalmente determinada si sabemos como actúa sobre una base.

En este caso sabemos que los vectores del núcleo tienen por imagen el vector cero. A partir de la ecuación del núcleo hallamos $dim(\mathbb{R}^3) - 1$ ecuación $= 2$ generadores pasando a paramétricas:

$$z = -x - y$$

y

$$x = a, \quad y = b, \quad z = -a - b$$

De donde:

$$ker(f) = \mathcal{L}\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}.$$

Además notamos que los vectores del núcleo son autovectores asociados al cero, porque si $\vec{u}$ está en el núcleo $f(\vec{u}) = \vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$. Por tanto el 0 es autovalor de f con multiplicidad geométrica 2.

Por otra parte $(1,1,1)$ es otro autovector asociado a un autovalor distinto (porque no pertenece al núcleo). Es decir:

$$f(1,1,1) = \lambda(1,1,1)$$

con $\lambda \neq 0$. La multiplicidad geométrica de este autovalor es al menos 1.

Como en total las multiplicidades geométricas suman $3 = dim(\mathbb{R}^3)$ y no pueden superar este valor, éstas coinciden con las algebraicas. Tenemos que el endomorfismo es diagonalizable con un autovalor 0 de multiplicidad 2; y otro $\lambda \neq 0$ con multiplicidad 1.

Pero sabemos que la suma de autovalores contados con multiplicidad es igual a la traza (porque la traza se conserva por semejanza):

$$2 = traza(F_C) = 0 + 0 + \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2.$$

En definitiva tenemos que:

$$f(1,0,-1) = (0,0,0), \quad f(0,1,-1) = (0,0,0), \quad f(1,1,1) = 2 \cdot (1,1,1) = (2,2,2).$$

Los vectores $B = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,1,1)\}$ son base de $\mathbb{R}^e$ porque son tantos vectores como la dimensión del espacio e indpendientes porque el rango de la matriz que forman es tres:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3.$$

Entonces por definición de matriz asociada:

$$F_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(las columnas de la matriz son las imágenes de los vectores de la base B expresadas en la base C).

Y finalmente cambiando de base:

$$F_C = F_{CC} = F_{CB}M_{BC} = F_{CB}M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

9.– *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) *Hallar los autovalores y los autovectores de A.*

Los autovalores son las raíces del polinomio caractertístico:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda Id| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2 - 2\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

Concluimos que los autovalores son:

$\lambda_1 = 0$ con multiplicidad algebraica 1.

$\lambda_2 = 1$ con multiplicidad algebraica 1.

$\lambda_3 = 2$ con multiplicidad algebraica 2.

Para cada uno de ellos hallamos los autovectores.

Asociados a $\lambda_1 = 0$:

$$(A - 0 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ 2y + z - t = 0 \\ z + t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$t = -z, \quad y = t, \quad x = -2t$$

de donde:

$$S_0 = \mathcal{L}\{(2, -1, 1, -1)\}.$$

Asociados a $\lambda_2 = 1$:

$$(A - 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2y + z + t = 0 \\ y + z - t = 0 \\ t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0$$

de donde:

$$S_1 = \mathcal{L}\{(1, 0, 0, 0)\}.$$

Asociados a $\lambda_3 = 2$:

$$(A - 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + 2y + z + t = 0 \\ z - t = 0 \\ -z + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$z = t, \quad x = 2y + 2t$$

de donde:

$$S_2 = \mathcal{L}\{(2,1,0,0),(2,0,1,1)\}.$$

(ii) *Determinar si A es diagonalizable por semejanza. En caso afirmativo, dar una matriz P inversible y una matriz diagonal D tales que $P^{-1}AP = D$.*

Hemos visto en el apartado anterior que existen cuatro autovectores linealmente independientes y por tanto como estamos en $\mathbb{R}^4$ ($dim(\mathbb{R}^4) = 4$) existe una base de autovectores. Por tanto la matriz diagonaliza por semejanza.

La matriz diagonal D es la formada por los autovalores (sobre la diagonal), repetidos tantas veces como indica su multiplicidad:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

y la matriz P la formada por los autovectores como columnas de la misma, ordenados de forma coherente con el orden en que hemos colocado los autovalores en D:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Hallar $traza(A^{12})$.*

Si $A = P^{-1}DP$ entonces $A^{12} = P^{-1}D^{12}P$, es decir, A^{12} y D^{12} son semejantes. Como la semejanza conserva la traza:

$$traza(A^{12}) = traza(D^{12}) = traza \begin{pmatrix} 0^{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{12} \end{pmatrix} = 1 + 2 \cdot 2^{12} = 2^{13} + 1 = 8193.$$

(iv) *¿Es A diagonalizble por congruencia?.*

No, porque no es simétrica.