Álgebra Lineal I — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **27 de junio de 2025**

1.– Nueve amigos van de viaje llevando para ello dos coches, uno de cuatro plazas y otro de cinco.

(i) ¿De cuántas formas pueden distribuirse en los dos coches si todos tienen carnet de conducir?

(ii) ¿De cuántas formas pueden distribuirse en los dos coches si sólo tres tienen carnet de conducir?

(**Nota:** sólo interesa distinguir quiénes van en cada coche y cuál es el conductor, pero no en qué asientos se sienta cada uno.)

(1 punto)

2.– Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se define la matriz 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} b & b & b & a \\ b & b & a & b \\ b & a & b & b \\ a & b & b & b \end{pmatrix}$$

(i) Calcular $det(A)$ y $traza(A)$ en función de a y b.

(ii) Estudiar el rango de A en función de los valores de a y b.

(iii) Hallar a y b para que $det(AA^t) = 0$. (1.1 puntos)

3.– Dar tres matrices distintas $A, B, C \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y no diagonales tales que A y B sean congruentes y equivalentes por filas y A y C sean equivalentes por filas pero no congruentes. Justifica la respuesta.

(1 punto)

4.– Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar los valores de a y b para los cuales A y B son

(i) Equivalentes por filas.

(ii) Equivalentes por columnas.

(iii) Equivalentes.

(iv) Congruentes. En este caso dar además un matriz inversible P tal que $P^t A P = B$.

(1.2 puntos)

5.– Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) Dos matrices simétricas e inversibles de tamanõ 3×3 con traza cero son congruentes.

(ii) Si V es un espacio vectorial con $dim(V) = 2025$ y $S_1, S_2 \subset V$ son subespacios con $dim(S_1) = 2000$ y $dim(S_1 \cap S_2) = 1000$, entonces $dim(S_2) \leq 1025$.

(iii) Dados $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ no nulos y distintos, los vectores $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ y $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ son linealmente independientes.

(0.9 puntos)

6.– Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual que 2. Sean:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \qquad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p'(0) = 0\}$$

(i) Demostrar que V es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(ii) Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas de $U \cap V$ respecto de la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(iii) Probar que $B = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(iv) Hallar las ecuaciones implíctas de $U \cap V$ respecto de la base B.

(v) Dar las ecuaciones paramétricas de un subespacio W, tal que U y W sean suplementarios.

(1.3 puntos)

7.– Sea $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices cuadradas 2×2. Se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | traza(A) = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{Id\}$$

(i) Probar que U y V son subespacios suplementarios.

(ii) Calcular la proyección de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ sobre U paralelamente a V.

(iii) Dar una matriz no inversible cuya proyección sobre V paralelamente a U sea Id. (1.2 puntos)

8.– De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se sabe que, $(1,1,1)$ es un autovector, $ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z = 0\}$ y $traza(F_C) = 2$. Hallar la matriz F_C asociada a f respecto de la base canónica.

(1 punto)

9.– Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Hallar los autovalores y los autovectores de A.

(ii) Determinar si A es diagonalizable por semejanza. En caso afirmativo, dar una matriz P inversible y una matriz diagonal D tales que $P^{-1}AP = D$.

(iii) Hallar $traza(A^{12})$.

(iv) ¿Es A diagonalizable por congruencia?. (1.3 puntos)

Álxebra Lineal I — Exame Final

Exercicio único (3 horas.) **27 de xullo de 2025**

1.– Nove amigos van de viaxe levando para iso dous coches, un de catro prazas e outro de cinco.

(i) De cantas formas poden distribuírse nos dous coches se todos teen carné de conducir?

(ii) De cantas formas poden distribuírse nos dous coches se só tres teen carné de conducir?

(**Nota:** Só interesa distinguir quen vai en cada coche e quen é o condutor, pero non en que asento se senta cada un.)

(1 punto)

2.– Dados $a, b \in \mathbb{R}$ defínese a matriz 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} b & b & b & a \\ b & b & a & b \\ b & a & b & b \\ a & b & b & b \end{pmatrix}$$

(i) Calcular $det(A)$ e $traza(A)$ en función de a e b.

(ii) Estudar o rango de A en función dos valores de a e b.

(iii) Atopar a e b para que $det(AA^t) = 0$. (1.1 puntos)

3.– Dar tres matrices distintas $A, B, C \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e non diagonais tales que A e B sexan congruentes e equivalentes por filas, e A e C sexan equivalentes por filas pero non congruentes. Xustifica a resposta.

(1 punto)

4.– Dadas as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Atopar os valores de a e b para os cales A e B son

(i) Equivalentes por filas.

(ii) Equivalentes por columnas.

(iii) Equivalentes.

(iv) Congruentes. Neste caso, dar ademáis unha matriz inversible P tal que $P^tAP = B$.

(1.2 puntos)

5.– Razoar a veracidade ou falsidade das seguintes afirmacións.

(i) Dúas matrices simétricas e invertibles de tamaño 3×3 con traza cero son congruentes.

(ii) Se V é un espazo vectorial con $dim(V) = 2025$ e $S_1, S_2 \subset V$ son subespazos con $dim(S_1) = 2000$ e $dim(S_1 \cap S_2) = 1000$, entón $dim(S_2) \leq 1025$.

(iii) Dados $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ non nulos e distintos, os vectores $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ e $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ son linealmente independentes.

(0.9 puntos)

6.– Sexa $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espazo vectorial real de polinomios de grao menor ou igual que 2. Sexan:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \qquad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p'(0) = 0\}$$

(i) Demostrar que V é un subespazo vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(ii) Calcular as ecuacións implícitas e paramétricas de $U \cap V$ respecto da base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(iii) Probar que $B = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$ é unha base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(iv) Atopar as ecuacións implícitas de $U \cap V$ respecto da base B.

(v) Dar as ecuacións paramétricas dun subespazo W, tal que U e W sexan suplementarios.

(1.3 puntos)

7.– Sexa $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o espazo vectorial de matrices cadradas 2×2. Considéranse os subespazos vectoriais:

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | traza(A) = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{Id\}$$

(i) Probar que U e V son subespazos suplementarios.

(ii) Calcular a proxeción da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ sobre U paralelamente a V.

(iii) Dar unha matriz non invertible cuxa proxeción sobre V paralelamente a U sexa Id. (1.2 puntos)

8.– Dada unha aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sábese que $(1,1,1)$ é un autovector, $ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$ e $traza(F_C) = 2$. Atopar a matriz F_C asociada a f respecto da base canónica.

(1 punto)

9.– Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Atopar os autovalores e os autovectores de A.

(ii) Determinar se A é diagonalizable por semellanza. No caso afirmativo, dar unha matriz P invertible e unha matriz diagonal D tales que $P^{-1}AP = D$.

(iii) Atopar $traza(A^{12})$.

(iv) É A diagonalizable por congruencia? (1.3 puntos)
