Álgebra Lineal I — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **28 de junio de 2024**

1.– ¿Cuántas matrices distintas 3×3 pueden formarse con exactamente tres 1s, tres 2s y tres 3s?. ¿Cuántas de ellas tienen traza igual a 7?

(1 punto)

2.– Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $A_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & \dots & 1 & 1 \\ n & n & n & n & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Dar una expresión para el elemento a_{ij} en función de i, j.

(ii) Calcular $det(A_4)$.

(iii) Para $n \geq 2$, calcular traza A_n, $det(A_n)$ e $rango(A_n)$.

(1.1 puntos)

3.– Hallar una matriz invertible $X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ verificando la ecuación:

$$X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Es única?. (1.1 puntos)

4.– Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, hallar los valores de a y b para que A y B sean congruentes. Para tales valores dar una matriz P tal que $PAP^t = B$.

(1 puntos)

5.– Sea V un espacio vectorial que tiene un sistema generador formado por 2024 vectores. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) V tiene un sistema de 2024 vectores linealmente independientes.

(ii) $dim(V) \geq 2024$.

(iii) $dim(V) \leq 2024$.

(iv) Cualquier subconjunto de V formado por 2025 vectores es un sistema de vectores linealmente dependientes.

(1.2 puntos)

6.– Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual que 2. Sean:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{1 + x\}$$

(i) Demostrar que U es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(ii) Demostrar que U y V son subespacios suplementarios.

(iii) Calcular la proyección de $1 - x + x^2$ sobre U paralelamente a V.

(1.2 puntos)

7.– Sea la aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y, z) = (x - y, x + y + z)$$

(i) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

(ii) Probar que $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ y $B' = \{(1, -1), (1, 0)\}$ son bases respectivamente de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

(iii) Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de $ker(f)$ respecto de la base B.

(iv) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases B y B'.

(1.3 puntos)

8.– De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se sabe que $f(1, 2) = (1, 1)$ y $(0, 1) \in ker(f)$. Calcular $f(6, 5)$.

(0.7 puntos)

9.– Para cada número $k \in \mathbb{R}$ se define la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar los valores de k para los cuales A es diagonalizable por semejanza.

(ii) Para $k = 0$:

(ii.a) Calcular los autovectores de A.

(ii.b) Hallar una matriz inversible P y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

(iii) Hallar k para que $traza(A^5) = 35$.

(1.4 puntos)

Álxebra Lineal I		Exame Final
Exercicio único	(3 horas.)	**28 de xullo de 2024**

1.– Cantas matrices distintas 3×3 poden formarse con exactamente tres 1s, tres 2s e tres 3s?. Cantas delas teñen traza igual a 7?

(1 punto)

2.– Para cada $n \in \mathbb{N}$ defínese a matriz $A_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ coma:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & \dots & 1 & 1 \\ n & n & n & n & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Dar unha expresión para o elemento a_{ij} en función de i, j.

(ii) Calcular $det(A_4)$.

(iii) Para $n \geq 2$, calcular traza A_n, $det(A_n)$ y $rango(A_n)$.

(1.1 puntos)

3.– Atopar unha matriz invertible $X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ verificando a ecuación:

$$X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

É única?.

(1.1 puntos)

4.– Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, atopar os valores de a e b para que A e B sexan congruentes. Para tales valores dar unha matriz P tal que $PAP^t = B$.

(1 puntos)

5.– Sexa V un espazo vectorial que ten un sistema xerador formado por 2024 vectores. Razoa a veracidade ou falsedade das seguintes afirmacions.

(i) V ten un sistema de 2024 vectores linealmente independentes.

(ii) $dim(V) \geq 2024$.

(iii) $dim(V) \leq 2024$.

(iv) Calquera subconxunto de V formado por 2025 vectores é un sistema de vectores linealmente dependentes.

(1.2 puntos)

6.– Sexa $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espazo vectorial real de polinomios de grao menor ou igual que 2. Sexan:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{1 + x\}$$

(i) Demostrar que U é un subespazo vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(ii) Demostrar que U e V son subespazos suplementarios.

(iii) Calcular a proxección de $1 - x + x^2$ sobre U paralelamente a V.

(1.2 puntos)

7.– Sexa a aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y, z) = (x - y, x + y + z)$$

(i) Atopar a matriz asociada a f respecto das bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

(ii) Probar que $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ e $B' = \{(1, -1), (1, 0)\}$ son bases respectivamente de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

(iii) Atopar as ecuacións implícitas e paramétricas de $ker(f)$ respecto da base B.

(iv) Atopar a matriz asociada a f respecto de las bases B e B'.

(1.3 puntos)

8.– Dunha aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se sabe que $f(1, 2) = (1, 1)$ e $(0, 1) \in ker(f)$. Calcular $f(6, 5)$.

(0.7 puntos)

9.– Para cada número $k \in \mathbb{R}$ defínese a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar os valores de k para os cales A é diagonalizable por semellanza.

(ii) Para $k = 0$:

(ii.a) Calcular os autovectores de A.

(ii.b) Atopar unha matriz inversible P e unha matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

(iii) Atopar k para que $traza(A^5) = 35$.

(1.4 puntos)
