Álgebra Lineal I		**Examen Final**
Ejercicio único	(3 horas)	**28 de julio de 2024**

1.– *¿Cuántas matrices distintas 3×3 pueden formarse con exactamente tres $1s$, tres $2s$ y tres $3s$?.*

Cada matriz 3×3 está formada por 9 elementos, que han de ser precisamente tres 1s, tres 2s y tres 3s. Lo que diferencia una matriz de otra es el orden en que aparecen esos números. Se trata por tanto de permutaciones con reptición de 9 elementos de los cuales 3, 3 y 3 son iguales entre si.

$$PR_{9;3,3,3} = \frac{9!}{3!3!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1680.$$

¿Cuántas de ellas tienen traza igual a 7?

La traza de la matriz es la suma de los tres términos de la diagonal. Con las cifras que tenemos la única forma de sumar 7 es como $3+3+1$ ó $3+2+2$. En cualquiera de los dos casos esos tres números pueden ordenarse de $PR_{3;2,1}$ formas distintas. Y los seis números restantes pueden ordenarse de $PR_{6;3,2,1}$. Por tanto el número de matrices con traza 7 serán:

$$2 \cdot PR_{3;2,1} \cdot PR_{6;3,2,1} = 2 \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{6!}{3!2!1!} = 360.$$

2.– *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $A_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & \dots & 1 & 1 \\ n & n & n & n & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

(i) *Dar una expresión para el elemento a_{ij} en función de i, j.*

En la diagonal y por encima de ella los elementos de la matriz son 1s. Es decir si el índice i de fila es menor o igual que el de la columna j entonces $a_{ij} = 1$. En otro caso los elementos de la matriz son iguales a la fila que ocupan:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \leq j \\ i \text{ si } i > j \end{cases}$$

(ii) *Calcular $det(A_4)$.*

Veremos en el apartado siguiente que $det(A_n) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Por tanto $det(A_4) = (-1)^3 \cdot 3! = -6$.

(iii) *Para $n \geq 2$, calcular traza A_n, $det(A_n)$ e rango(A_n).*

Tenemos $traza(A_n) = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ veces}} = n.$.

Para el determinante a cada fila a partir de la segunda le restamos la primera multiplicada por el número de fila; a la segunda fila le restamos la primera por 2; a la tercera la primera por 3 y así sucesivamente.

Queda:

$$det(A_n) = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & \dots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(n-2) & -(n-2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(n-1) \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

. El determinante nunca se anula y así el rango de la matriz es el máximo posible, es decir, $rango(A_n) = n$.

(1.1 puntos)

3.– *Hallar una matriz invertible* $X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *verificando la ecuación:*

$$X\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Es única?.

La existencia de X inversible tal que $XA = B$ es lo mismo que decir que A y B son equivalentes por filas. Entonces hallamos y comparamos las formas reducidas por filas de ambas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{31}(-2)]{H_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{13}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que las formas reducidas canónicas por filas coinciden y por tanto existe la matriz X en las condiciones pedidas. Para hallarla hacemos las mismas operaciones filas en la identidad comenzando con las que nos permitieron llegar de A a la forma reducida y luego las que llevan (su inversa) de la forma reducida a la matriz B.

$$Id \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2(-1)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(2)} \xrightarrow{H_{31}(2)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución non es única, podemos cambiar las filas 3 y 4 de la forma reducida (sin que esta se vea realmente modificada), onteniendo así una nueva matriz de paso.

(1.1 puntos)

4.– *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, *hallar los valores de a y b para que A y B sean congruentes. Para tales valores dar una matriz P tal que $PAP^t = B$.*

Dado que B es simétrica, para que sean congruentes A también tiene que ser simétrica, ya que la congruencia conserva la simetría. Por tanto $a = 1$.

Además son congruentes si y sólo si al ser diagonalizadas por congruencia tenemos los mismos signos en la diagonal:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y teniendo en cuenta que ya sabemos que $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

Deducimos que son congruentes si y sólo si $a = b = 1$.

La matriz P verificando $PAP^t = B$ es la matriz de paso por filas de A hacia B. Realizamos sobre la identidad las mismas operaciones fila para llegar de A a la forma diagonal y de ésta a a la matriz B:

$$Id \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = P.$$

5.– *Sea V un espacio vectorial que tiene un sistema generador formado por 2024 vectores. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) *V tiene un sistema de 2024 vectores linealmente independientes.* FALSO. Por ejemplo $\mathbb{R}^2$ tiene un sistema generador formado por 2024 vectores:

$$v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,2),\ v_3 = (0,3)\ldots,\ v_{2024} = (0,2024)$$

Pero el máximo número de vectores independientes es 2, porque $dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

(ii) $dim(V) \geq 2024$.

FALSO. Basta considerar el ejemplo del apartado (i), $V = \mathbb{R}^2$.

(iii) $dim(V) \leq 2024$.

VERDADERO. La dimensión de un espacio vectorial es el menor número de vectores que se necesitan para generarlo; por tanto si tenemos 2024 generadores, $dim(V) \leq 2024$.

(iv) *Cualquier subconjunto de V formado por 2025 vectores es un sistema de vectores linealmente dependientes.*

VERDADERO. Según vimos en (iii) $dim(V) \leq 2024$. Un espacio vectorial como máximo puede tener tantos vectores independientes como su dimensión; como $2025 > 2024 \geq dim(V)$, no puede haber 2025 vectores independientes.

6.– *Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual que 2. Sean:*

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{1 + x\}$$

(i) *Demostrar que U es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Primero, U es no vacío por que $p_0(x) = 0 \in U$ ya que $p_0(1) = 0$.

Despúes tenemos que ver que si $p(x), q(x) \in U$ y $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $ap(x) + bq(x) \in U$. Como $p(x), q(x) \in U$ sabemos que $p(1) = q(1) = 0$ y entonces:

$$ap(1) + bq(1) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

y por tanto efectivamente $ap(x) + bq(x) \in U$.

(ii) *Demostrar que U y V son subespacios suplementarios.*

Probaremos que $dim(U) + dim(V) = dim(U + V) = dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))) = 3$.

Escribimos las ecuaciones de U respecto de la base canónica $C = \{1, x, x^2\}$. Tenemos en cuenta que si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ entonces $p(x) \equiv (a_0, a_1, a_2)_C$. Además:

$$p(1) = 0 \iff a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 0 \iff a_0 + a_1 + a_2 = 0$$

Concluimos que:

$$U = \{(a_0, a_1, a_2)_C | a_0 + a_1 + a_2 = 0\} = \mathcal{L}\{(1, -1, 0)_C, (1, 0, -1)_C\}$$

y $dim(U) = 2$. Por otra parte:

$$V = \mathcal{L}\{1 + x\} = \mathcal{L}\{(1, 1, 0)_C\}$$

y $dim(V) = 1$. Finalmente:

$$U + V = \mathcal{L}\{(1, -1, 0)_C, (1, 0, -1)_C, (1, 1, 0)_C\}$$

y

$$dim(U + V) = rango \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

(iii) *Calcular la proyección de $1 - x + x^2$ sobre U paralelamente a V.*

Consideramos una base B formada por las bases de V y U:

$$B = \{\underbrace{(1, -1, 0)_C, (1, 0, -1)_C}_{V}, \underbrace{(1, 1, 0)_C}_{V}\}$$

Expresamos el vector $1 - x + x^2 = (1, -1, 1)_C$ en la base B:

$$M_{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{CB}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$(1, -1, 1)_C = (3/2, -1, 1/2)_B = \underbrace{\frac{3}{2} \cdot (1, -1, 0)_C - 1 \cdot (1, 0, -1)_C}_{U} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (1, 1, 0)_C}_{V}$$

y así la proyección pedida es:

$$\frac{3}{2} \cdot (1, -1, 0)_C - 1 \cdot (1, 0, -1)_C = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)_C = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + x^2.$$

(1.2 puntos)

7.– *Sea la aplicación lineal:*

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y,z)=(x-y,x+y+z)$$

(i) *Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.*

Trasladando coeficientes la matriz asociada en las bases canónica es:

$$F_{C'C}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

donde $C=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $C'=\{(1,0),(0,1)\}$.

(ii) *Probar que $B=\{(1,1,0),(1,0,0),(1,0,1)\}$ y $B'=\{(1,-1),(1,0)\}$ son bases respectivamente de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.*

Para que los vectores formen base basta que el número de vectores coincida con la dimensión del espacio y que el rango de la matriz de coordenadas sea el máximo posible.

En el primer caso tenemos $3=dim(\mathbb{R}^3)$ vectores y el rango es:

$$rango\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=3.$$

y en el segundo $2=dim(\mathbb{R}^2)$ y:

$$rango\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=2.$$

(iii) *Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de $ker(f)$ respecto de la base B.*

Para hallar el núcleo directamente en la base B utilizaremos la matriz asociada que calcularemos en el apartado siguiente, que utiliza la base B en el espacio de partida. Entonces:

$$ker(f)=\{(x',y',z')_B|F_{B'B}(x',y',z')^t=(0,0,0)^t\}$$

Planteamos:

$$F_{B'B}\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x'-y'-2z'=0\\ 2x'+2y'+3z'=0\end{cases} \iff \begin{cases} 2x'+2y'+3z'=0\\ y'+z'=0\end{cases}$$

donde estas dos útlimas ecuaciones son independientes por no ser una múltiplo de la otra y corresponden a las implícitas pedidas.

Para las paramétricas resolvemos el sistema en función de $dim(\mathbb{R}^3)-$ n de ecuaciones $=3-2=1$ parámetros. De la segunda ecuación:

$$y'=-z'$$

y reemplazando en la primera:

$$2x'+z'=0 \iff z'=-2x'.$$

Las paramétricas quedan:

$$x'=\lambda, \qquad y'=2\lambda, \qquad z'=-2\lambda.$$

(iv) *Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases B y B'.*

Aplicamos la fórmula de cambio de base:

$$F_{B'B}=M_{B'C'}F_{C'B}=M_{C'B'}^{-1}F_{C'B}=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

(1.3 puntos)

8.– *De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se sabe que $f(1,2) = (1,1)$ y $(0,1) \in ker(f)$. Calcular $f(6,5)$.*

Como $(0,1) \in ker(f)$, $f(0,1) = (0,0)$. Además por la linealidad:

$$f(1,0) = f((1,2) - (0,2)) = f((1,2) - 2\cdot(0,1)) = f(1,2) - 2f(0,1) = (1,1).$$

Finalmente:

$$f(6,5) = f(6(1,0) + 5(0,1)) = 6f(1,0) + 5f(0,1) = (6,6).$$

(0.7 puntos)

9.– *Para cada número $k \in \mathbb{R}$ se define la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) *Estudiar los valores de k para los cuales A es diagonalizable por semejanza.*

Para que diagonalice por semejanza la suma de multipliciades algebraicas de los autovalores de A debe de ser 4 y las multiplicidades algebraicas y geométricas deben de coincidir.

Comenzamos entonces calculando el polinomio característico; sus raíces son los autovalores de A.

$$|A - \lambda Id| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2 & k-\lambda & 0 \\ k & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & k-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & k-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3(k-\lambda).$$

Vemos que los autovalores son:

$\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 3.

$\lambda_2 = k$ con multipliciadd algebraica 1.

Distinguimos el caso particular $k = 1$ en cuyo caso simplemente tendríamos:

$\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 4.

En cualquier caso la suma de algebraicas es 4 y la matriz triangulariza por semejanza. Veamos que ocurre con las multiplicidades geométricas.

Si $k \neq 1$, para $\lambda_2 = k$, la multiplicidad algebraica es 1 y por tanto la geométrica también.

Para $\lambda_1 = 1$:

$$mg(1) = 4 - rango(A - 1Id) = 4 - rango\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & k-1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 4 - rango\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & k-1 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - rango\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} 4 - 3 = 1 \text{ si } k \neq 0 \\ 4 - 1 = 3 \text{ si } k = 0 \end{cases}$$

Vemos que las geométricas y las algebraicas coinciden cuando $k = 0$.

Si $k=1$, entonces exactamente con el mismo razonamiento que antes vemos que:

$$mg(1) = 4-3 = 1 \neq 4 = ma(1)$$

y por tanto NO diagonaliza.

Resumiendo, diagonaliza si y sólo si $k=0$.

(ii) *Para $k=0$:*

(ii.a) *Calcular los autovectores de A.*

Vimos que para $k=0$ los autovalores son:

$\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 3.

$\lambda_2 = 0$ con multipliciadd algebraica 1.

Calculamos los autovectores asociados a $\lambda_1 = 1$:

$$(A - 1\cdot Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2y+z=0.$$

Por tanto:

$$S_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | 2y+z=0\} = \mathcal{L}\{(1,0,0,0),(0,1,-2,0),(0,0,0,1)\}.$$

Calculamos los autovectores asociados a $\lambda_2 = 0$:

$$(A - 0\cdot Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x+2y+z=0, \quad y=0, \quad t=0.$$

Por tanto:

$$S_0 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+z=0, \quad y=0, \quad t=0.\} = \mathcal{L}\{(1,0,-1,0)\}.$$

(ii.b) *Hallar una matriz inversible P y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.*

La matriz diagonal es la formada por los autovalores repetidos tantas veces como indica su multiplicidad:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

y la matriz P aquella cuyas columnas son los correspondientes autovectores:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Hallar k para que $traza(A^5) = 35$.*

La traza se conserva por semejanza y por tanto es igual a la suma de los autovalores; queda:

$$35 = traza(A^6) = 1^5 + 1^5 + 1^5 + k^5 = 3 + k^5 \Rightarrow k^5 = 32.$$

por tanto $k=2$.

(1.4 puntos)