# Álgebra Lineal I **Prueba escrita. Soluciones.**

**29 de octubre de 2019** (45 minutos)

**1.–** *Un estudiante debe responder siete de las diez preguntas de un examen.*

(i) *¿De cuántas formas puede hacer su elección?.*

Hay que contar las distintas formas de elegir 7 elementos de un total de 10 de manera que han de ser todos distintos y no importa el orden en que se elijan (tan sólo que preguntas han decidido contestarse). Se trata por tanto de combinaciones sin repetición de 10 elementos tomados de 7 en 7:

$$C_{10,7} = \binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

(ii) *¿Y si debe contestar necesariamente las dos primeras preguntas?*

En ese caso restan por elegir otras $7 - 2 = 5$ preguntas entre las $10 - 2 = 8$ restantes. Razonando como antes se trata de combinaciones sin repetición de 8 elementos tomados de 5 en 5:

$$C_{8,5} = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

(iii) *¿Y si debe responder al menos cuatro de las seis primeras preguntas?*

**Método I:** Hay tres opciones:

a) Contestar exactamente cuatro de las seis primeras preguntas.

Las formas de elegir que 4 preguntas se responderán entre las 6 primeras son $C_{6,4}$. Por cada una de esas elecciones hay que elegir las $7 - 4 = 3$ preguntas restantes entre las $10 - 6 = 4$ últimas opciones. Las formas de hacerlo son $C_{4,3}$. En conjunto:

$$C_{6,4} \cdot C_{4,3} = \binom{6}{4}\binom{4}{3} = \binom{6}{2}\binom{4}{1} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4}{1} = 60.$$

b) Contestar exactamente cinco de las seis primeras preguntas.

Análogamente, son:

$$C_{6,5} \cdot C_{4,2} = \binom{6}{5}\binom{4}{2} = \binom{6}{1}\binom{4}{2} = \frac{6}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 36.$$

c) Contestar exactamente las seis primeras preguntas.

En este caso simplemente resta por contar las formas de elegir la pregunta restante entre las 4 últimas que son $C_{4,1} = 4$.

En total:

$$60 + 36 + 4 = 100.$$

**Método II:** En el apartado (i) hemos calculado todas las posibiliades para escoger 7 preguntas de las 10 totales. Restaremos aquellas en las que se responden menos de cuatro entre las seis primeras. Pero dado que en total hay que escoger siete, en ese caso necesariamente deben de escogerse las cuatro preguntas finales y las otras tres entre las 6 primeras.

Las formas de escoger 3 preguntas entre las 6 primeras son:

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Y por tanto la cantidad pedida es:

$$120 - 20 = 100.$$

(3 puntos)

---

**2.–** *Dado $n \geq 2$ se considera la matriz $A_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida como:*

$$a_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } i \geq j \\ \\ j \text{ si } i < j \end{cases}$$

(i) *Para $n = 4$ escribir $A_4$.*

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Calcular $det(A_4)$ y $traza(A_4)$.*

Lo resolveremos de forma general en el apartado siguiente.

(iii) *Calcular en general $det(A_n)$ y $traza(A_n)$.*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-2 & n-2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante restamos a cada fila la anterior:

$$det(A_n) = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la última columna queda:

$$det(A_n) = n \cdot (-1)^{1+n} det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} \cdot n$$

En particular para $n = 4$, $A_4 = (-1)^5 \cdot 4 = -4$.

En cuanto a la traza es:

$$traza(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En particular para $n = 4$, $A_4 = \dfrac{4 \cdot (4+1)}{2} = 10$.

(3 puntos)

---

**3.–** *Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $A, B$ son matrices simétricas, entonces $AB + BA$ es simétrica.*

VERDADERO. Por ser $A, B$ simétricas cumplen $A = A^t$ y $B = B^t$. Entonces:

$$(AB + BA)^t = (AB)^t + (BA)^t = B^tA^t + A^tB^t = BA + AB = AB + BA.$$

y por tanto $AB + BA$ es simétrica por coincidir son su traspuesta.

(ii) *Si $traza(A) = 0$ entonces $det(A) = 0$.*

FALSO. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad traza(A) = 0 + 0 = 0, \quad \text{pero } det(A) = 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

(iii) *Una matriz hemisimétrica $3 \times 3$ puede tener rango $2$.*

VERDADERO. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene rango 2 porque su determinante es nulo y el menor formado por las dos primeras filas y columnas tiene determinante no nulo; es hemisimétrica porque $A^t = -A$.

(iv) *Una matriz hemisimétrica $3 \times 3$ puede tener rango $1$.*

FALSO. Una matriz $A$ hemisimétrica $3 \times 3$ cumple $A^t = -A$ y por tanto es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Para tener rango 1 cualquier menor de orden dos tiene que tener determinate cero. En particualar:

- El formado por las dos primeras filas y columnas:

$$0 = det \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a^2$$

Por tanto $a = 0$.

- El formado por las filas y columnas primera y tercera:

$$0 = det \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b^2$$

Por tanto $b = 0$.

- El formado por las filas y columnas segunda y tercera:

$$0 = det \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} = c^2$$

Por tanto $c = 0$.

Pero entonces si $a = b = c = 0$ la matriz $A$ es nula y su rango es cero.

(4 puntos)

---