Preguntas frecuentes.

I. ¿Cuándo coloco los vectores como fila y cuándo como columna?.

La idea **general** es que el convenio que hemos adoptado en la asignatura es que las **coordenadas** de los vectores se escriben como matrices **columna**.

Concretando:

1. Matrices para analizar independencia linear: FILA o COLUMNA "al gusto".

   Dado el subespacio de $\mathbb{R}^3$:

   $$U = \mathcal{L}\{(1,0,0),(1,1,1),(0,1,1)\}$$

   queremos hallar una base del mismo eliminando los vectores dependientes del sistema de generadores dado:

   Trabajando por filas:

   Colocamos las coordenadas de los vectores como FILAS y hacemos operaciones FILA:

   $$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{H_{32}(-1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Concluimos que:

   $$U = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,1)\}$$

   Trabajando por columnas:

   Colocamos las coordenadas de los vectores como COLUMNAS y hacemos operaciones COLUMNA:

   $$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

   Concluimos que:

   $$U = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,1)\}$$

   Lo USUAL es trabajar por filas por un simple criterio de comodidad.

2. Matrices de cambio de base: coordenadas SIEMPRE en COLUMNA.

   Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$ si consideramos la base $B = \{(1,1,2),(3,2,5),(8,1,0)\}$ y la base canónica, la matriz de cambio de base de la base B a la canónica es:

   $$M_{CB} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

   Para cambiar de base un vector lo multiplicamos por columna por dicha matriz. Por ejemplo para pasar el vector de coordenadas $(1,2,3)_B$ en la base B a la base canónica haríamos:

   $$M_{CB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

   y por tanto $(1,2,3)_B = (31,8,12)_C$.

3. Matrices asociadas a aplic. lineaes: coordenadas SIEMPRE en COLUMNA.

   Ejemplo: Consideramos $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como

   $$f(x,y) = (x+y, 2x+3y, 5x+8y)$$

   y las bases canónicas $C_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ y $C_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de los espacios vectoriales de partida y de llegada. La matriz asociada a la aplicación respecto a tales bases se construye como:

   $$\begin{array}{ccl} \text{Base de partida} & & \text{Imágenes expresadas en base de llegada} \\ (1,0) & \longrightarrow & (1+0, 2\cdot 1+3\cdot 0, 5\cdot 1+8\cdot 0) = \\ & & = (1,2,5) = 1(1,0,0)+2(0,1,0)+5(0,0,1) \\ (0,1) & \longrightarrow & (0+1, 2\cdot 0+3\cdot 1, 5\cdot 0+8\cdot 1) = \\ & & = (1,3,8) = 1(1,0,0)+3(0,1,0)+8(0,0,1) \end{array}$$

   La matriz queda:

   $$F_{C_3C_2} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{array}\right)$$

   Para hallar la imagen de un vector usando dicha matriz lo multiplicamos como vector columna, es decir:

   $$f(2,3) \equiv F_{C_3C_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 34 \end{pmatrix} \equiv (5,13,34).$$

II. Pero en las matrices asociadas a ap. lineales a veces parece que los colocamos como fila. ¿Por qué?.

Eso es debido a que cuando la aplicación lineal es de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ y tabajamos respecto de las bases canónicas hay una forma "rápida" de escribir la matriz, que es una simple regla nemotécnica. En cada fila de la matriz se colocan los coeficientes de las variables de los vectores del espacio de partida.

En el ejemplo de la pregunta anterior, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con:

$$f(x,y) = (x+y, 2x+3y, 5x+8y) = (1\cdot x + 1\cdot y, 2\cdot x + 3\cdot y, 5\cdot x + 8)$$

quedaría:

$$F_{C_3C_2} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 5 & 8 \end{array}\right)$$

Nótese que en realidad lo que hemos puesto como fila NO son COORDENADAS de vectores, SINO COEFICIENTES de variables.

III. No sé como comenzar a trabajar con subespacios vectoriales de espacios distintos de $\mathbb{R}^n$ (espacios de matrices, de polinomios).

La idea siempre es tratar de escribir las ecuaciones impícitas o los generadores del subespacio dado con respecto de la base canónica, utilizando la información que nos dan sobre el mismo.

Ejemplos típicos.

1. En el espacio de matrices $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

   (a) $U = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | traza(A) = 0\}$.

   Una matriz 2×2 es de la forma $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ de manera que $(x, y, z, t)_C$ son precisamente sus coordenadas respecto a la base canónica del espacio de matrices. La condición que define los vectores de U es:

   $$traza(A) = 0 \iff traza \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 0 \iff x + t = 0.$$

   Por tanto:
   $$x + t = 0.$$
   es la ecuación implícita de U respecto de la base canónica.

   (b) $U = \mathcal{L}\left\{Id, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right\}$.

   Directamente en la base canónica:

   $$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0, 0, 1)_C, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = (2, 1, 0, 3)_C.$$

   y por tanto:
   $$U = \mathcal{L}\{(1, 0, 0, 1)_C, (2, 1, 0, 3)_C\}.$$

2. En el espacio de polinomios $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

   (a) $U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) + p'(0) = 0\}$.

   Un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que 2 es de la forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ siendo entonces (a_0, a_1, a_2) sus coordenadas respecto de la base canónica.

   Se tiene que $p'(x) = a_1 + 2a_2x$ y por tanto la condición:

   $$p(1) + p'(0) = 0$$

   equivale a:

   $$a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 + 2a_2 \cdot 0 = 0 \iff a_0 + 2a_1 + a_2 = 0.$$

   Por tanto:
   $$a_0 + 2a_1 + a_2 = 0$$
   es la ecuación implícita de U respecto de la base canónica.

   (b) $U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(2) = p(-1) = 0\}$.

   Como antes llamando $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ las condiciones que definen U equivalen a:

   $$\begin{array}{l} p(2) = 0 \iff a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 0 \iff a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0. \\ p(-1) = 0 \iff a_0 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 = 0 \iff a_0 - a_1 + a_2 = 0. \end{array}$$

   Por tanto las ecuaciones impícitas de U respecto de la base canónica son:

   $$\begin{array}{l} a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 = 0 \end{array}$$