POLINOMIOS. DIVISIÓN Y FACTORIZACIÓN.

División de polinomios.

- Se escriben los polinomios dividendo y divisor, ordenando sus monomios de mayor a menor grado.
- Se divide el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor.
- Se anota el monomio cociente y se multiplica por el divisor.
- Se coloca el producto obtenido debajo del dividendo y se cambia de signo.
- Se suman los términos correspondientes y se repite el proceso con el nuevo polinomio resultante.
- El proceso termina cuando se obtiene un polinomio de grado menor que el divisor: el resto.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\multicolumn{4}{c|}{\text{dividendo}} & \text{divisor} \\
x^3 & -4x^2 & +6x & -5 & x^2-x+1 \\
\cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & -x & & x-3 \quad \text{cociente} \\
\cline{1-4}
 & -3x^2 & +5x & -5 & \\
 & 3x^2 & -3x & +3 & \\
\cline{2-4}
 & & 2x & -2 & \\
 & & \multicolumn{2}{c|}{\text{resto}} &
\end{array}
$$

Se expresa como:

$$\underbrace{x^3-4x^2+6x-5}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x^2-x+1)}_{\text{divisor}}\underbrace{(x-3)}_{\text{cociente}} + \underbrace{2x-2}_{\text{resto}}$$

ó

$$\frac{\overbrace{x^3-4x^2+6x-5}^{\text{dividendo}}}{\underbrace{(x^2-x+1)}_{\text{divisor}}} = \underbrace{x-3}_{\text{cociente}} + \frac{\overbrace{2x-2}^{\text{resto}}}{\underbrace{(x^2-x+1)}_{\text{divisor}}}$$

RUFFINI: división de un polinomio por $x-a$.

- Se ordena el polinomio dividendo de mayor a menor grado y se completan con ceros los coeficientes de los términos ausentes.
- Se escribe el número a (con signo cambiado) en la parte izquierda de la tabla de Ruffini.
- Se baja el primer coeficiente del polinomio, se multiplica por a y el resultado se coloca debajo del siguiente coeficiente.
- Se suman los números de esa columna y el resultado se coloca abajo.
- Se repite el proceso: multiplicar el resultado por a, colocarlo debajo del coeficiente siguiente y sumar.
- El último número obtenido es el **resto** de la división, y los demás números corresponden a los coeficientes del **cociente**.

Ejemplo: $(x^4-x^2-2x-6):(x-2)$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \\
2 & & 2 & 4 & 6 & 8 \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2
\end{array}
$$

$(*)$ Si falta un coeficiente de un cierto grado se pone un cero.

En este caso falta x^3.

Se expresa como:

$$\underbrace{x^4-x^2-2x-6}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x-2)}_{\text{divisor}}\underbrace{(x^3+2x^2+3x+4)}_{\text{cociente}} + \underbrace{2}_{\text{resto}}$$

ó

$$\frac{\overbrace{x^4-x^2-2x-6}^{\text{dividendo}}}{\underbrace{x-2}_{\text{divisor}}} = \underbrace{x^3+2x^2+3x+4}_{\text{cociente}} + \frac{2}{\underbrace{x-2}_{\text{divisor}}}$$

Factorización de polinomios.

Factorización de un polinomio de grado dos: $ax^2 + bc + c$.

Se resuelve la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac =$discriminante

- Si tiene dos soluciones x_1, x_2 ($\Delta > 0$) el polinomio queda factorizado como $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si tiene una solución x_1 ($\Delta = 0$) el polinomio queda factorizado como $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.
- Si no tiene solución ($\Delta < 0$) el polinomio **no se puede factorizar (con números reales)**.

Ejemplo: $2x^2 - x - 1$.

$$2x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

$$\boxed{2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x+1/2)}$$

Ejemplo: $x^2 + 4x + 4$.

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -2$$

$$\boxed{x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2}$$

Factorización de un polinomio $p(x)$ en general.

- Se busca una raíz del polinomio: un valor x_1 tal que $p(x_1) = 0$.
- Se divide el polinomio entre $(x - x_1)$ (por Ruffini), obteniendo $p(x) = (x - x_1)q(x)$, donde $q(x)$ es el cociente.
- Se repite el procedimiento con $q(x)$ hasta que el polinomio no pueda factorizarse más.

¡IMPORTANTE!

- Para buscar **raíces enteras** de un polinomio con **coeficientes enteros** $x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ se buscan entre divisores del término independiente a_0.
- Para buscar **raíces racionales** de un polinomio con **coeficientes enteros** $a_nx^n + a_{n-1}x_{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ se buscan de la forma p/q, con p divisor de a_0 y q divisor de a_n.
- ¡OJO! Lo anterior sólo sirve para buscar raíces enteras o racionales. **NO SIRVE para cualquier raíz**.
- En general, es **mejor tener un polinomio factorizado** que sin factorizar.

$$\underbrace{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x + 6}_{\text{MENOS ÚTIL}} = \underbrace{(x-1)^2(x+2)(x-3)}_{\text{MÁS ÚTIL}}$$

Ejemplo de factorización de un polinomio.

Factoricemos el polinomio $x^3 + x^2 - 5x - 6$

- Buscamos raíces enteras entre los divisores de 6. Los candidatos son $1, 2, 3, -1, -2, -3$. Vamos probando con Ruffini buscando resto cero.

¿$(x-1)$?.
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 1 & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & -9 \neq 0 \end{array}$$
¡¡NO!!

¿$(x+2)$?.
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -5 & -6 \\ -2 & & -1 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & 0 = 0 \end{array}$$
¡¡SI!!

$$(x^2 + x - 5x - 6x) = (x+2)(x^2 - x - 3).$$

- Como es de grado dos, factorizamos $x^2 - x - 3$ resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - x - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\boxed{x^3 + x^2 - 5x - 6 = (x+2)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)}$$