

POLINOMIOS. DIVISIÓN Y FACTORIZACIÓN.

División de polinomios.

- Se escriben los polinomios dividendo y divisor, ordenando sus monomios de mayor a menor grado.
- Se divide el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor.
- Se anota el monomio cociente y se multiplica por el divisor.
- Se coloca el producto obtenido debajo del dividendo y se cambia de signo.
- Se suman los términos correspondientes y se repite el proceso con el nuevo polinomio resultante.
- El proceso termina cuando se obtiene un polinomio de grado menor que el divisor: el resto.

$$\begin{array}{r}
 \text{dividendo} \\
 x^3 - 4x^2 + 6x - 5 \\
 \underline{-x^3 + x^2 - 3x + 1} \\
 -3x^2 + 5x - 6 \\
 \underline{3x^2 - 3x + 3} \\
 2x - 2 \\
 \text{resto}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{divisor} \\
 x^2 - x + 1 \\
 \text{cociente} \\
 x - 3
 \end{array}$$

Se expresa como:

$$\underbrace{x^3 - 4x^2 + 6x - 5}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\text{divisor}} \underbrace{(x - 3)}_{\text{cociente}} + \underbrace{2x - 2}_{\text{resto}}$$

ó

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \frac{x^3 - 4x^2 + 6x - 5}{x^2 - x + 1} = \underbrace{x - 3}_{\text{cociente}} + \frac{2x - 2}{x^2 - x + 1}$$

RUFFINI: división de un polinomio por $x - a$.

- Se ordena el polinomio dividendo de mayor a menor grado y se completan con ceros los coeficientes de los términos ausentes.
- Se escribe el número a (con signo cambiado) en la parte izquierda de la tabla de Ruffini.
- Se baja el primer coeficiente del polinomio, se multiplica por a y el resultado se coloca debajo del siguiente coeficiente.
- Se suman los números de esa columna y el resultado se coloca abajo.
- Se repite el proceso: multiplicar el resultado por a , colocarlo debajo del coeficiente siguiente y sumar.
- El último número obtenido es el **resto** de la división, y los demás números corresponden a los coeficientes del **cociente**.

Ejemplo: $(x^4 - x^2 - 2x - 6) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \\
 & & 2 & 4 & 6 & 8 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2
 \end{array}$$

(*) Si falta un coeficiente de un cierto grado se pone un cero.
En este caso falta x^3 .

Se expresa como:

$$\underbrace{x^4 - x^2 - 2x - 6}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x - 2)}_{\text{divisor}} \underbrace{(x^3 + 2x^2 + 3x + 4)}_{\text{cociente}} + \underbrace{2}_{\text{resto}}$$

ó

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \frac{x^4 - x^2 - 2x - 6}{x - 2} = \underbrace{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}_{\text{cociente}} + \frac{2}{x - 2}$$

Factorización de polinomios.

Factorización de un polinomio de grado dos: $ax^2 + bx + c$.

Se resuelve la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac = \text{discriminante}$

- Si tiene dos soluciones x_1, x_2 ($\Delta > 0$) el polinomio queda factorizado como $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si tiene una solución x_1 ($\Delta = 0$) el polinomio queda factorizado como $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.
- Si no tiene solución ($\Delta < 0$) el polinomio **no se puede factorizar (con números reales)**.

Ejemplo: $2x^2 - x - 1$.

$$2x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -1/2 \end{array} \right.$$

$$2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)(x + 1/2)$$

Ejemplo: $x^2 + 4x + 4$.

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = -2$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

Factorización de un polinomio $p(x)$ en general.

- Se busca una raíz del polinomio: un valor x_1 tal que $p(x_1) = 0$.
- Se divide el polinomio entre $(x - x_1)$ (por Ruffini), obteniendo $p(x) = (x - x_1)q(x)$, donde $q(x)$ es el cociente.
- Se repite el procedimiento con $q(x)$ hasta que el polinomio no pueda factorizarse más.

¡IMPORTANTE!

- Para buscar **raíces enteras** de un polinomio con **coeficientes enteros** $x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ se buscan entre divisores del término independiente a_0 .
- Para buscar **raíces racionales** de un polinomio con **coeficientes enteros** $a_nx^n + a_{n-1}x_{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ se buscan de la forma p/q , con p divisor de a_0 y q divisor de a_n .
- ¡OJO!** Lo anterior sólo sirve para buscar raíces enteras o racionales. **NO SIRVE para cualquier raíz.**
- En general, es **mejor tener un polinomio factorizado** que sin factorizar.

$$\underbrace{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x + 6}_{\text{MENOS ÚTIL}} = \underbrace{(x - 1)^2(x + 2)(x - 3)}_{\text{MÁS ÚTIL}}$$

Ejemplo: $x^3 + x^2 - 5x - 6$

- Buscamos raíces enteras entre los divisores de 6. Los candidatos son 1, 2, 3, -1, -2, -3. Vamos probando con Ruffini buscando resto cero.

$$i(x - 1)? \quad \begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & 1 & -5 & -6 \\
 & & 1 & 2 & -3 \\
 \hline
 & 1 & 2 & -3 & -9 \neq 0
 \end{array} \quad \text{¡¡NO!!}$$

$$i(x + 2)? \quad \begin{array}{r|rrrr}
 -2 & 1 & 1 & -5 & -6 \\
 & & -2 & -1 & 2 & 6 \\
 \hline
 & 1 & -1 & -3 & 0 = 0
 \end{array} \quad \text{¡¡SI!!}$$

$$(x^2 + x - 5x - 6x) = (x + 2)(x^2 - x - 3).$$

- Como es de grado dos, factorizamos $x^2 - x - 3$ resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - x - 3 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \end{array} \right.$$

Por tanto:

$$x^3 + x^2 - 5x - 6 = (x + 2) \left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right)$$