SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Definición

Un **sistema de m ecuaciones lineales** y n incógnitas es un conjunto de m ecuaciones donde las incógnitas tienen exponente 1.
De forma general:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

términos independientes

Si se anulan los términos independientes $(b_1, b_2, \dots, b_m) = (0, 0, \dots, 0)$ el sistema se llama **homogéneo**.

Matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matriz ampliada

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Regla de Cramer

Si A es cuadrada y $\det(A) \neq 0$, entonces la solución única es $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$, donde A_i es la matriz que resulta de sustituir en A la columna i por la de términos independientes.

Ejemplo

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

$$det(A) = 2 \cdot 3 - (-3) \cdot 1 = 9 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{compatible determinado}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{18}{9} = 2, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{9}{9} = 1$$

Para sistemas HOMOGÉNEOS (término independiente nulo).

Siempre son compatibles. Al menos tienen la solución trivial $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$.

- es **compatible determinado** (solución única), si $rango(A) =$nº de incógnitas.
- es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones), si $rango(A) <$nº de incógnitas.

Teorema de Rouché-Frobenius

Sean $rango(A)$ y $rango(\overline{A})$ los rangos de la matriz asociada y la ampliada:

- Si $rango(A) \neq rango(\overline{A})$, el sistema es **incompatible** (NO tiene solución).
- Si $rango(A) = rango(\overline{A})$, el sistema es **compatible** (tiene solución):
  - Si $rango(A) = rango(\overline{A}) = n$, el sistema es **compatible determinado** (solución única).
  - Si $rango(A) = rango(\overline{A}) < n$, el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones). Solución en función de $n - rango(A)$ parámetros.

Ejemplo. Discusión y resolución de sistema 3×3

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = 3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Calculamos $rango(A)$ y $rango(\overline{A})$ a la vez escalonando la **matriz ampliada**:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como una vez escalonadas tanto la matriz ampliada como la del sistema tienen dos filas no nulas el rango de ambas es 2:

$rango(A) = rango(\overline{A}) = 2 \quad \Rightarrow$ **Sistema compatible**

$rango(A) = 2 < 3 =$ nº de incógnitas $\quad \Rightarrow$ Sistema compatible **indeterminado**

El sistema tiene solución en función de nº de incógnitas $- rango(A) = 3 - 2 = 1$ parámetros.
Pasamos de la matriz asociada escalonada sin las filas de ceros, al sistema que representa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Resolvemos en función de z que será el parámetro. Hacia atrás, de la última ecuación a la primera.
De la segunda ecuación $y = z$, y sustituyendo en la primera $x = 1 - y - z = 1 - 2z$.
Llamando t al parámetro (la variable z) las infinitas soluciones quedan: $\boxed{x = 1 - 2t, \quad y = t, \quad z = t \quad t \in \mathbb{R}}$