MATRICES. GENERALIDADES Y RANGO.

Definición de matriz $m \times m$

- Una **matriz** es un conjunto de $m \times n$ elementos dispuestos en m **filas** y n **columnas**.
- Suelen denotarse con letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{12} = elemento en fila 1 columna 2.

Rango de una matriz

- El rango es el máximo número de filas (o columnas) linealmente independientes de la matriz.
- El rango es el máximo tamaño de todas las submatrices cuadradas con determinante no nulo.

Cálculo por el método de orlado:

- Se busca una submatriz 1×1 con $det \neq 0$. Si no existe, hemos terminado y $rango = 0$. Si existe $rango \geq 1$ y continuamos.
- Se busca una submatriz 2×2 con $det \neq 0$, **añadiendo una fila y columna a la del paso anterior**. Si no existe, hemos terminado y $rango = 1$. Si existe $rango \geq 2$ y continuamos.
- Se busca una submatriz 3×3 con $det \neq 0$, **añadiendo una fila y columna a la del paso anterior**. Si no existe, hemos terminado y $rango = 2$. Si existe $rango \geq 3$ y continuamos.
- Así sucesivamente. Se termina cuando NO hemos encontrado submatriz con $det \neq 0$ ó agotamos filas ó columnas.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad |1| = 1 \neq 0, \quad \checkmark$

, (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad$ ✗, $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0, \quad \checkmark$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad$ ✗, $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad$ ✗ $\quad \boxed{rango(A) = 2}$

Cálculo por Gauss:

Escalonar: $\begin{cases} \text{Intercambiar filas} \\ \text{Multiplicar/dividir fila por un número (para conseguir unos)} \\ \text{Sumar a una fila un múltiplo de otra (hacer ceros)} \end{cases}$

$\boxed{Rango = \begin{array}{l} \textbf{Número de filas no nulas} \\ \text{de la forma escalonada.} \end{array}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boxed{rango(A) = 2}$$

Matrices especiales

- **Matriz cuadrada:** Matriz con el mismo número de filas y columnas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{cuadrada} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{NO cuadrada}$$

- **Matriz fila:** Matriz con una sola fila.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matriz columna:** Matriz con una sola columna.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal:** Matriz con ceros fuera de la diagonal.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular superior (inferior):** Matriz con ceros debajo (encima) de la diagonal.

$$\underset{\text{Triangular superior}}{\begin{pmatrix} 9 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{Triangular inferior}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}}$$

- **Matriz identidad I:** Matriz cuadrada con unos en la diagonal y cero en el resto.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz simétrica:** Matriz cuadrada que coincide con su traspuesta.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma de matrices $A+B$

Se suman matrices del mismo tamaño sumando elementos en la misma posición.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+3 & 1+0 \\ 3+(-1) & 4+2 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- Conmutativa: $A+B=B+A$.
- Asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$.
- Elemento neutro: Matriz nula 0: $0+A=A+0=A$.
- Elemento opuesto: $-A$, $A+(-A)=(-A)+A=0$.

Producto de un número por una matriz $k \cdot A$

Se multiplican todos los elementos de la matriz por el número.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 0 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- $k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$.
- $(k+t)\cdot A=k\cdot A+t\cdot A$.
- $(k\cdot t)\cdot A=k\cdot(t\cdot A)$.
- $1\cdot A=A$.

Producto de dos matrices $A \cdot B$

El número de columnas de la primera matriz debe de coincidir con el número de filas de la segunda.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{3\times 3} = \begin{array}{ccc} \text{1ª fila} \times \text{1ª columna} & \text{1ª fila} \times \text{2ª columna} & \text{1ª fila} \times \text{3ª columna} \\ \left(2\cdot 0+(-1)\cdot 2+1\cdot 3 \right. & 2\cdot 1+(-1)\cdot 1+1\cdot 1 & \left. 2\cdot 1+(-1)\cdot 3+1\cdot 0 \right. \\ \left. 3\cdot 0+0\cdot 2+1\cdot 3 \right. & 3\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1 & \left. 3\cdot 1+0\cdot 3+1\cdot 0 \right) \\ \text{2ª fila} \times \text{1ª columna} & \text{2ª fila} \times \text{2ª columna} & \text{2ª fila} \times \text{3ª columna} \end{array} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{2\times 3}$$

FILAS POR COLUMNAS

Propiedades:

- Asociativa: $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
  $k(A\cdot B)=(kA)\cdot B$.
- Distributiva: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
  $(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$.
- Elemento neutro. $A\cdot I=I\cdot A=A$.

¡CUIDADO!

En general **el producto no es conmutativo**:

- $A\cdot B\neq B\cdot A$.
- $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$.
- $(A-B)^2\neq A^2-2AB+B^2$.
- $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$.

Matriz traspuesta A^t

Se obtiene intercambiando el papel de filas y columas:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}^t}_{2\times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}}_{3\times 2}$$

Propiedades:

- $((A)^t)^t = A$.
- $(A+B)^t = A^t + B^t$.
- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$.
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, **!OJO: cambio de orden!**

Matriz inversa A^{-1}

Cálculo por adjuntos:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)^t}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo por Gauss:

$(A|I) \to (I|\,A^{-1})$

Escalonar con **operaciones fila**:
- Intercambiar filas
- Multiplicar/dividir fila por un número (para conseguir unos)
- Sumar a una fila un múltiplo de otra (hacer ceros)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 + F_3]{F_1 \to F_1 - 3F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Propiedades:

- **Definición**: Cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.
- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$.
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, **!OJO: cambio de orden!**
- $I^{-1} = I$.
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

¡CUIDADO!

- Una matriz que **NO** es **cuadrada NO** tiene **inversa**.
- Una matriz con **determinante nulo NO** tiene **inversa**.
- Una matriz con una **fila o columna de ceros NO** tiene **inversa**.
- $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.
- Para "despejar" **importa el orden. Si A tiene inversa:**
  $A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$
  $X \cdot A = B \quad \Rightarrow \quad X = B \cdot A^{-1}$

DETERMINANTES. CÁLCULO Y PROPIEDADES.

Cálculo de determinantes (I)

Determinante 2×2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Determinante 3×3. Regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & b & c \\ d & \mathbf{e} & f \\ g & h & \mathbf{i} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & \mathbf{b} & c \\ d & e & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & h & i \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & e & f \\ g & \mathbf{h} & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (\ aei\ +\ bfg\ +\ dhc\ ) - (\ ceg\ +\ bdi\ +\ fha\ )$$

$$\begin{vmatrix} a & b & \mathbf{c} \\ d & \mathbf{e} & f \\ \mathbf{g} & h & i \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & \mathbf{b} & c \\ \mathbf{d} & e & f \\ g & h & \mathbf{i} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a} & b & c \\ d & e & \mathbf{f} \\ g & \mathbf{h} & i \end{vmatrix}$$

Cálculo de determinantes (II)

Adjunto de un elemento:

A_{ij} = **adjunto** del término en la fila i columna j = $(-1)^{i+j}$**determinante** de la matriz al **quitar fila** i **y columna** j

Signos:

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{5} & 0 \\ 2 & \cancel{4} & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 6 - 0 \cdot 2) = -18$

Determinante por adjuntos:

Se elije una fila (ó columna): el determinante es la suma de los elementos de la fila (ó columna) multiplicados por sus adjuntos.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{12} + 5 \cdot A_{22} + 4 \cdot A_{32} = 0 \cdot \left(-\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \right) + 5 \cdot \left(+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \right) + 4 \cdot \left(-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = 0 + 10 + 24 = 34.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{31} + 4 \cdot A_{32} + 6 \cdot A_{33} = 2 \cdot \left(+\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \right) + 4 \cdot \left(-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) + 6 \cdot \left(+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right) = -20 + 24 + 30 = 34.$$

Propiedades de los determinantes (línea=fila ó columna)

- El determinante de la identidad es 1. $|I| = 1$
- Al trasponer el determinante no varía:

$$|A^t| = |A|$$

- El determinante de la inversa es la inversa del determinante:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

- Determinante del producto es producto de determinantes:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

- Si A es $n \times n$, $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$.
- El determinante de una matriz triangular es el producto de su diagonal.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6. \qquad \begin{vmatrix} 9 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 2 \cdot 2 = 36.$$

- El determinante de una matriz diagonal es el producto de su diagonal.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6.$$

- Si tiene una línea de ceros, el determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- Si tiene dos líneas iguales o proporcionales, el determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 9 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

- Si una línea es combinación lineal de las otras, el determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & b \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

- Si se permutan dos líneas el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

- Si a una línea se le suma un múltiplo de otra el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2+(-2)\cdot 1 & 2 \\ 2 & 5+(-2)\cdot 2 & 1 \\ 2 & 4+(-2)\cdot 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

- Si una línea se multiplica por k, el determinante se multiplica por k.

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Si una línea es suma de dos, el determinante se descompone en suma de dos determinantes, con las otras líneas invariantes:

$$\begin{vmatrix} 5 & x+2 \\ 1 & y+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

¡CUIDADO!

Si A, B son matrices $n \times n$:

- $|A+B| \neq |A| + |B|$.
- $|-A| \neq |A|$ (es $|-A| = (-1)^n |A|$)
- $|kA| \neq k|A|$ (es $|kA| = k^n \cdot |A|$)