INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS **2023/2024**

Interpolación e Integración **(PRÁCTICA 5)**

1. Un ingeniero desea obtener una función continua que aproxime un conjunto de datos obtenidos experimentalmente. Los datos de que se dispone son:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1, & f(x_0) = 3 \\ x_1 = 3, & f(x_1) = 5 \\ x_2 = 6, & f(x_2) = 6 \end{array} \tag{1}$$

   Para ello se plantea:

a) Obtener el polinomio interpolador que pasa por los puntos dato utilizando la base de polinomios canónica (Ecuaciones Normales).

b) Obtener el polinomio interpolador que pasa por los puntos dato utilizando la base de polinomios de Lagrange.

c) Para asegurarse la obtención del resultado correcto el ingeniero se plantea la comparación de los dos polinomios obtenidos en los apartados anteriores. ¿Son iguales los polinomios que se obtienen para los apartados a) y b)? Comprobar a su vez que los polinomios pasan por los puntos dato de interpolación.

d) A la vista del resultado anterior, el ingeniero decide que los resultados obtenidos no se ajustan a lo esperado y se plantea una nueva estrategia. Dado que desde un punto de vista teórico sabe que los valores dato deben ajustarse a una recta se plantea tomar un mayor número de datos y calcular la recta de regresión mediante aproximación por mínimos cuadrados. Los datos utilizados en este caso son:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1, & f(x_0) = 3 \\ x_1 = 3, & f(x_1) = 5 \\ x_2 = 6, & f(x_2) = 6 \\ x_3 = 10, & f(x_3) = 9 \\ x_4 = 11, & f(x_4) = 10 \end{array} \tag{2}$$

e) Introducir los datos del apartado anterior en una hoja de cálculo y obtener la recta de ajuste por mínimos cuadrados. Comprobar que la ecuación coincide con la obtenida en el apartado anterior.

f) Repetir el cálculo del apartado d) teniendo en cuenta que todos los puntos tienen un coeficiente de ponderación unitario a excepción del último punto, que tiene un coeficiente de ponderación 2.

Solución 1.a Para obtener el polinomio interpolador mediante la base canónica tenemos que resolver el sistema de ecuaciones con matriz de Vandermonde tal que:

$$\begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{Bmatrix}$$

Que para este problema quedaría como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

Si se resuelve el sistema de ecuaciones se obtiene que:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8/5 \\ 23/15 \\ -2/15 \end{Bmatrix}$$

De modo que el polinomio interpolador queda como:

$$P_2^{\mathcal{C}}(x) = \frac{-2}{15}x^2 + \frac{23}{15}x + \frac{8}{5}$$

Solución 1.b El polinomio interpolador en base de Lagrange se plantea como:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{L}_i(x) f(x_i)$$

donde $\mathcal{L}_i(x)$ son los polinomios de la base de Lagrange obtenidos como:

$$\mathcal{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

En este caso con $n = 2$ calculamos la base de polinomios como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x) &= \frac{(x-3)(x-6)}{(1-3)(1-6)} = \frac{(x-3)(x-6)}{10} \\ \mathcal{L}_1(x) &= \frac{(x-1)(x-6)}{(3-1)(3-6)} = \frac{(x-1)(x-6)}{-6} \\ \mathcal{L}_2(x) &= \frac{(x-1)(x-3)}{(6-1)(6-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{15} \end{aligned}$$

El polinomio resultante es por tanto:

$$P_2(x) = 3\,\frac{(x-3)(x-6)}{10} + 5\,\frac{(x-1)(x-6)}{-6} + 6\,\frac{(x-1)(x-3)}{15}$$

Solución 1.c Para comparar ambos polinomios, operamos las expresiones obtenidas:

$$\begin{aligned}
P_2^{\mathcal{L}}(x) &= 3\,\frac{(x-3)(x-6)}{10} + 5\,\frac{(x-1)(x-6)}{-6} + 6\,\frac{(x-1)(x-3)}{15} \\
&= \frac{3}{10}(x^2-9x+18) - \frac{5}{6}(x^2-7x+6) + \frac{6}{15}(x^2-4x+3) \\
&= \left(\frac{3}{10} - \frac{5}{6} + \frac{6}{15}\right)x^2 - \left(\frac{27}{10} - \frac{35}{6} + \frac{24}{15}\right)x + \left(\frac{54}{10} - \frac{30}{6} + \frac{18}{15}\right) \\
&= \frac{-2}{15}x^2 + \frac{23}{15}x + \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

$$P_2^{\mathcal{C}}(x) = \frac{-2}{15}x^2 + \frac{23}{15}x + \frac{8}{5}$$

Como se puede ver, el polinomio interpolador obtenido en base de Lagrange o en base canónica es exactamente el mismo. En este caso además hemos resuelto el sistema de ecuaciones con matriz de Vandermonde de forma analíticamente exacta. Para problemas con polinomios de mayor orden y resolución numérica la propagación de errores podría invalidar el resultado obtenido con la base canónica.

Podemos comprobar además que pasa por los puntos de interpolación sin más que evaluar el polinomio interpolador en los puntos base:

i	$f(x_i)$	$P_2^{\mathcal{C}}(x_i)$	$P_2^{\mathcal{L}}(x_i)$
1	3	3	3
2	5	5	5
3	6	6	6

Solución 1.d Planteamos la obtención de la recta de regresión por Mínimos Cuadrados:

$$\left.\begin{array}{lcl}
x_0 = 1 & , & f(x_0) = 3 \\
x_1 = 3 & , & f(x_1) = 5 \\
x_2 = 6 & , & f(x_2) = 6 \\
x_3 = 10 & , & f(x_3) = 9 \\
x_4 = 11 & , & f(x_4) = 10
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\text{Recta de regresión } \Rightarrow m = 1 \\
\\
\text{(polinomio de orden 1)} \\
\\
\text{5 puntos dato } \Rightarrow n = 4
\end{array}$$

La base de polinomios, utilizando la base canónica será:

$$B_0(x) = 1 \qquad , \qquad B_1(x) = x$$

La recta de regresión será de la forma $P_1(x) = a_0 + a_1\,x$ y el sistema de ecuaciones a resolver queda como:

$$\begin{pmatrix} < B_0(x_i), B_0(x_i) > & < B_0(x_i), B_1(x_i) > \\ & \\ < B_1(x_i), B_0(x_i) > & < B_1(x_i), B_1(x_i) > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} B_0(x_i) f(x_i) \\ \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} B_1(x_i) f(x_i) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i f(x_i) \end{pmatrix}$$

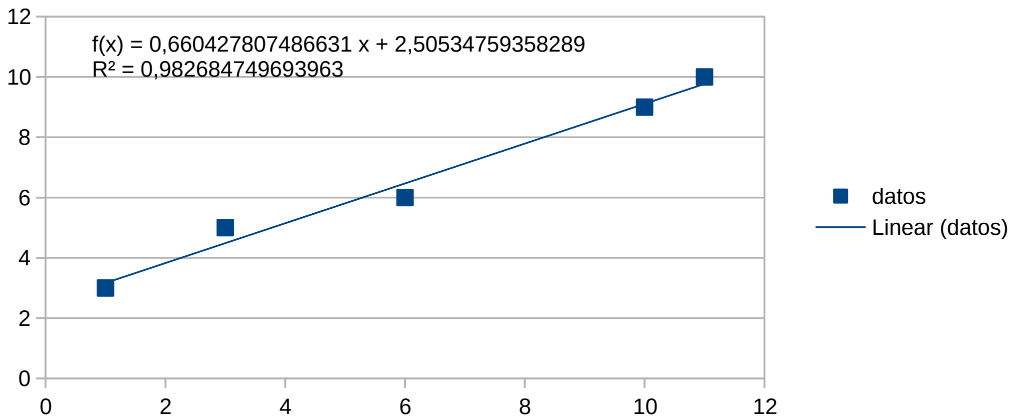
$$\begin{pmatrix} 5 & 31 \\ 31 & 267 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 254 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 33 & 31 \\ 254 & 267 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 31 \\ 31 & 267 \end{vmatrix}} = \frac{937}{374} \ ; \qquad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 33 \\ 31 & 254 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 31 \\ 31 & 267 \end{vmatrix}} = \frac{247}{374}$$

Por lo tanto la expresión del polinomio o en este caso de la recta de regresión será:

$$\boxed{P_1(x) = \frac{937}{374} + \frac{247}{374}\, x}$$

Solución 1.e La recta obtenida sería:



Solución 1.f Si todos los puntos tienen un coeficiente de ponderación unitario salvo el último que tiene un coeficiente de ponderación 2 el sistema a resolver quedaría como:

$$\begin{pmatrix} (n+2) & \sum_{i=0}^{n-1} x_i + 2x_n \\ \sum_{i=0}^{n-1} x_i + 2x_n & \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 + 2x_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + 2f(x_n) \\ \sum_{i=0}^{n-1} x_i f(x_i) + 2x_n f(x_n) \end{pmatrix}$$

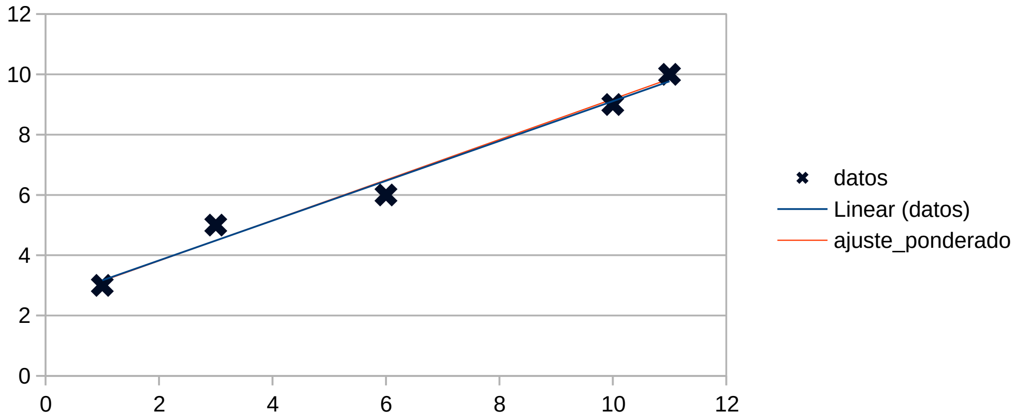
Esto es:

$$\begin{pmatrix} 6 & 42 \\ 42 & 388 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 364 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 43 & 42 \\ 364 & 388 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 42 \\ 42 & 388 \end{vmatrix}} = \frac{349}{141} \; ; \qquad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 43 \\ 42 & 364 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 42 \\ 42 & 388 \end{vmatrix}} = \frac{63}{94}$$

Y la recta de regresión ponderada quedaría como:

$$\boxed{P_1(x) = \frac{349}{141} + \frac{63}{94}\,x}$$



Como se puede observar el hecho de que el coeficiente de ponderación del último punto sea mayor que el resto hace que la recta se aproxime más a ese punto.

2. Calcular los pesos de integración para las cuadraturas de Newton-Cotes cerradas con 2 y 3 puntos de integración. ¿A qué algoritmos conocidos corresponden?

Solución 2 El cálculo de los pesos de integración de las cuadraturas de Newton-Cotes se realiza mediante la integración de los polinomios base de Lagrange, mediante la expresión:

$$w_i = h \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\alpha - j}{i - j}\, d\alpha$$

Por tanto, para 2 puntos de integración:

$$w_0 = h \int_0^1 \frac{\alpha - 1}{0 - 1}\, d\alpha = h \int_0^1 1 - \alpha \; d\alpha = \frac{h}{2}$$

$$w_1 = h \int_0^1 \frac{\alpha - 0}{1 - 0}\, d\alpha = h \int_0^1 \alpha \; d\alpha = \frac{h}{2}$$

Lo que se corresponde con la fórmula del Trapecio.
Para 3 puntos de integración:

$$w_0 = h\int_0^2 \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{(0-1)(0-2)}\,d\alpha = h\int_0^2 \frac{\alpha^2-3\alpha+2}{2}\,d\alpha = \frac{h}{3}$$

$$w_1 = h\int_0^2 \frac{(\alpha-0)(\alpha-2)}{(1-0)(1-2)}\,d\alpha = h\int_0^2 \frac{\alpha^2-2\alpha}{-1}\,d\alpha = \frac{4h}{3}$$

$$w_2 = h\int_0^2 \frac{(\alpha-0)(\alpha-1)}{(2-0)(2-1)}\,d\alpha = h\int_0^2 \frac{\alpha^2-\alpha}{2}\,d\alpha = \frac{h}{3}$$

Lo que se corresponde con la fórmula de Simpson.

---

3. Un Ingeniero desea comprobar la fiabilidad de las cuadraturas de integración más habituales resolviendo una integral de la que se conoce su solución analítica:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx \tag{3}$$

Para ello se propone calcular la integral mediante varios métodos numéricos y comparar la solución obtenida con la solución analítica. Los métodos propuestos son:

- Cuadratura de Newton-Cotes cerrada con 3 puntos de integración
- Cuadratura de Newton-Cotes cerrada con 5 puntos de integración
- Método del trapecio compuesto con 4 subintervalos
- Método de Simpson compuesto con 2 subintervalos

Se pide:

a) Obtener numéricamente la aproximación de la integral propuesta con cada uno de los métodos propuestos anteriormente

b) ¿Qué algoritmo proporciona una mejor aproximación de la integral con un menor número de puntos de integración?

c) ¿Qué algoritmo resulta más sencillo en su aplicación?

d) ¿Coinciden los resultados con los esperados?

Solución 3.a Calculamos la integral de forma numérica mediante cada una de las cuadraturas propuestas:

Newton-Cotes cerrada con 3 puntos de integración

Es decir, $n = 2$ o lo que es lo mismo, la regla de Simpson. Por lo tanto, la integral se aproxima como:

$$I \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)), \quad \text{con} \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi/2-0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

y los puntos base de integración.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \pi/4, \quad x_2 = \pi/2$$

$$\Rightarrow I \approx \frac{1}{3}\frac{\pi}{4}\left(1 + 4\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right) \approx \boxed{1{,}0022799}$$

Newton-Cotes cerrada con 5 puntos de integración

Es decir, $n = 4$, en este caso la integral se aproxima como:

$$I \approx \frac{2h}{45}\left(7(f(x_0{+}f(x_4)){+}32(f(x_1){+}f(x_3)){+}12f(x_2)\right), \quad \text{con} \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi/2-0}{4} = \frac{\pi}{8}$$

y los puntos base de integración.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \pi/8, \quad x_2 = \pi/4, \quad x_3 = 3\pi/8, \quad x_4 = \pi/2$$

y la función en los puntos base:

$$f(x_0) = 1, \quad f(x_1) \approx 0{,}9238795, \quad f(x_2) = \sqrt{2}/2, \quad f(x_3) \approx 0{,}3826834, \quad f(x_4) = 0$$

$$\Rightarrow I \approx \boxed{0{,}9999899}$$

Método el trapecio compuesto con 4 subintervalos

Es decir $n = 4$, por lo tanto el equiespaciado será de nuevo $\pi/8$, y los puntos base de integración son los mismos que en el caso anterior. No obstante, ahora la fórmula compuesta del trapecio se aplica como:

$$I \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\right) \approx \boxed{0{,}9871146}$$

Método de Simpson compuesto con 2 subinterbalos

Es decir $n = 2$, y por tanto el equiespaciado vuelve a ser $\pi/8$. Volvemos a usar los mismos puntos base pero con la fórmula compuesta de Simpson, en este caso:

$$I \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right) \approx \boxed{1{,}000133}$$

Solución 3.b Para comparar los métodos de integración y los resultados calculamos el valor de la integral de forma analítica y el error relativo de cada uno de los métodos:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = \sin(x)\Big|_0^{\pi/2} = 1$$

Método	Aproximación	Error relativo
NC 3 puntos	1.0022799	-2.28E-03
NC 5 puntos	0.9999899	1.01E-05
Trapecio Comp.	0.9871146	1.29E-02
Simpson Comp.	1.000133	1.33E-04

Por lo tanto, la mejor aproximación al valor de la integral se consigue con la cuadratura de Newton-Cotes con 5 puntos. Sin embargo, con la fórmula de Simpson simple, que únicamente utiliza 3 puntos ya obtiene una aproximación relativamente buena.

Solución 3.c Cualquiera de las fórmulas utilizadas en sencilla de aplicar. Sin embargo, la expresión del trapecio compuesto es la más sencilla de todas.

Solución 3.d Los resultados se ajustan a lo esperado. Los errores obtenidos en cada caso concuerdan con el orden de aproximación de cada método.

La fórmula de Newton-Cotes con 5 puntos obtiene una buena aproximación porque el orden del polinomio es elevado. Sin embargo, su expresión es más compleja que la de las fórmulas compuestas. Tanto el Trapecio compuesto como Simpson compuesto dan un resultado bueno y sus expresiones no solo son sencillas si no que permiten aumentar el número de puntos sin hacer más compleja la expresión.

---

4. Un ingeniero está desarrollando un programa de ordenador para trazado de obras lineales (carreteras, ferrocarril, ...). Para calcular el volumen de material de desmonte y de terraplén que necesita mover para realizar la obra se plantea la utilización de un método numérico de integración. El programa de trazado que ha realizado le proporciona el área de las secciones de desmonte y de terraplén cada 20 m a lo largo de la traza de la obra. ¿Qué algoritmo sería adecuado teniendo en cuenta que se pretende obtener una estimación y que su aplicación debe ser lo más sencilla posible? ¿Cómo se plantearía la obtención de los volúmenes de material de desmonte y de material de terraplén a partir de las áreas en secciones equiespaciadas con el algoritmo anterior? Desarrollar su expresión.

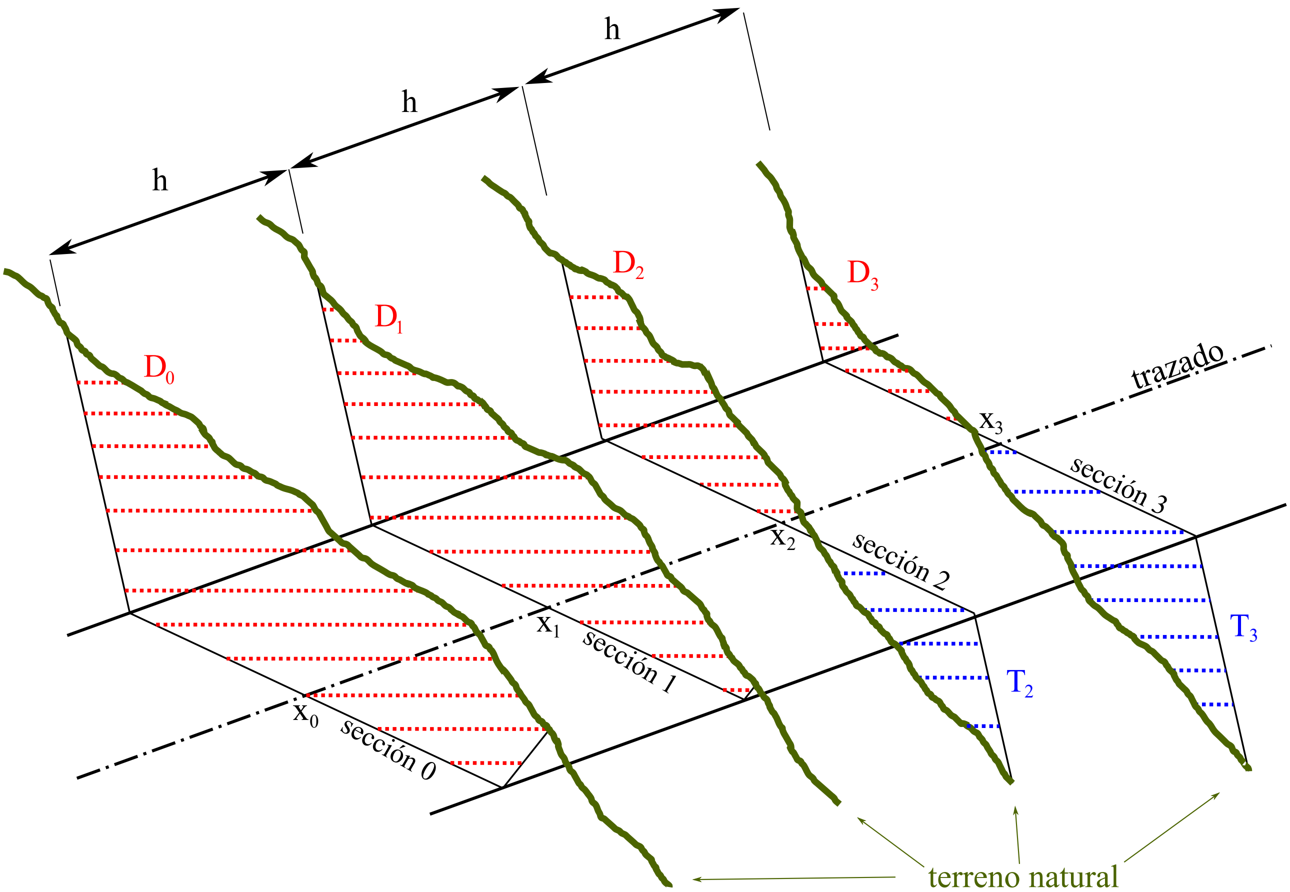
Solución 4 El algoritmo más adecuado sería la Fórmula Compuesta del Trapecio. De esta forma, se estimaría que la variación del área de desmonte y de terraplén entre una sección y otra es lineal.

La forma de calcular el volumen total de desmote y el volumen total de terraplén a partir de las áreas de desmonte (D_i) de cada sección de de las áreas de terraplén (T_i) de cada sección sería:

$$V_D \approx \frac{h}{2}\left(D_0 + 2D_1 + 2D_2 + \ldots + 2D_{n-1} + D_n\right)$$

$$V_T \approx \frac{h}{2}\left(T_0 + 2T_1 + 2T_2 + \ldots + 2T_{n-1} + T_n\right)$$

En la siguiente figura se puede ver de forma esquemática el procedimiento..



5. Un ingeniero necesita desarrollar una herramienta de cálculo de integrales numéricamente que le permita abordar gran variedad de problemas de forma sencilla. Se pide:

   a) Deducir la expresión general del método de Simpson compuesto utilizando $2p+1$ puntos de integración, de modo que su implementación en un programa de ordenador se pueda hacer de forma automática y sencilla.

   b) Utilizar el algoritmo anterior para calcular la integral:
   $$\int_0^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$$
   con 7 puntos de integración en total.

   c) Realizar un programa de ordenador en lenguaje Fortran que permita realizar el análisis anterior de forma sencilla. Analizar el problema del apartado b) con valores de p crecientes y analizar las soluciones obtenidas.

Solución 5.b Si utilizamos 7 puntos de integración, numerados de 0 a 6, quiere decir que estamos utilizando $p = 3$ particiones del dominio de integración. Por lo tanto, para este caso $h = (2-0)/6 = 1/3$ y la integral aproximada quedaría como:

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=0}^{p-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=0}^{p-2} f(x_{2i+2}) + f(x_{2p})\right]$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1
1	1/3	$e^{-1/9}$
2	2/3	$e^{-4/9}$
3	1	e^{-1}
4	4/3	$e^{-16/9}$
5	5/3	$e^{-25/9}$
6	2	e^{-4}

$$I \approx \frac{1}{9}\left[1 + 4\left(e^{-1/9} + e^{-1} + e^{-25/9}\right) + 2\left(e^{-4/9} + e^{-16/9}\right) + e^{-4}\right] \approx 0{,}882031575$$

Solución 5.c Realizamos un programa en lenguaje Fortran que además sea fácilmente adaptable para realizar otras integrales de otras funciones, con diferente intervalo de integración y con diferente número de particiones.

```
      program formula_compuesta_Simpson
      implicit integer*4(i-n)
      implicit real*8(a-h,o-z)

      write(6,*)'Indique el numero de particiones del dominio'
      read(5,*)np
      write(6,'(/a,i6,a)')'Calculando la integral con ',2*np+1,
     &                    ' puntos'

      a=0.d+00
      b=2.d+00

      h=(b-a)/(2.d+00*dble(np))

      s1=f(a)+f(b)

      s4=0.d+00
      do i=0,np-1
        xi=a+(dble(2*i+1)*h)
        s4=s4+f(xi)
      enddo

      s2=0.d+00
      do i=0,np-2
        xi=a+(dble(2*i+2)*h)
        s2=s2+f(xi)
      enddo

      sc=h/3.d+00*(s1+4.d+00*s4+2.d+00*s2)

      write(6,'(//a,e24.16,a,i5,a)')'I =',sc,
     &          '    (F. compuesta de Simpson y ',2*np+1,' puntos)'

      read(5,*)  ! Este "read" lo ponemos para poder hacer
                 ! doble click en el *.exe y ver el resultado
      end
!
!============================================================
!
      real*8 function f(x)
      implicit integer*4(i-n)
      implicit real*8(a-h,o-z)

      f=exp(-x*x)

      return
      end
```

p	$I_{Simpson\ comp.}$
3	0,8820315749547210
5	0,8820748768544940
7	0,8820796946350178
10	0,8820809835944895
15	0,8820813103490911
30	0,8820813857372951
50	0,8820813901111865
100	0,8820813907217201
500	0,8820813907623563
1000	0,8820813907624179

6. Se desea calcular el valor de la integral de una serie de funciones continuas

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

con un método numérico que proporcione buenos resultados y sea sencillo. Para ello el ingeniero se plantea hacer un ejemplo concreto de prueba de cara a comprobar qué método es más aconsejable. Se pide:

a) Obtener un valor aproximado de la integral,

$$I = \int_2^5 \frac{1}{x}dx$$

mediante:

a.1) La cuadratura de Newton-Cotes cerrada con 3 puntos de integración obtenida en el apartado anterior

a.2) Una cuadratura de Newton-Cotes cerrada con 4 puntos de integración

a.3) La regla compuesta del trapecio para 5 puntos de integración

a.4) La regla compuesta de Simpson para 5 puntos de integración

a.5) Calcular el valor analítico de la integral y comparar el error obtenido con los métodos.

b) A partir de los resultados anteriores indicar justificadamente qué método sería el más recomendable con carácter general.

Solución 6.a.1 Calculamos con Newton-Cotes y 3 puntos de integración

$$I \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \approx 0{,}921428571429$$

Solución 6.a.2 Calculamos con Newton-Cotes y 4 puntos de integración

$$I \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \approx 0{,}91875000000$$

Solución 6.a.3 Calculamos con la regla compuesta del trapecio y 5 puntos de integración

$$I \approx \frac{h}{2}(f_0 + 2(f_1 + f_2 + f_3) + f_4) \approx 0{,}92598357525$$

Solución 6.a.4 Calculamos con la regla compuesta de Simpson y 5 puntos de integración

$$I \approx \frac{h}{2}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) \approx 0{,}91678762414$$

Solución 6.a.5 Comparamos los resultados con la solución analítica $I = \ln(5) - \ln(2) \approx 0{,}91629073187$

Método	I_{approx}	Error relativo
Newton-Cotes 3 puntos	0,92142857143	0,5607 %
Newton-Cotes 4 puntos	0,91875000000	0,2684 %
Trapecio Comp. 5 puntos	0,92598357525	1,0578 %
Simpson Comp. 5 puntos	0,91678762414	0,0542 %

Solución 6.b Con carácter general el mejor método sería la cuadratura compuesta de Simpson, porque presenta una expresión sencilla y muy fácil de programar y además permite aumentar el número de puntos de integración hasta donde sea necesario. La fórmula compuesta del trapecio también tiene estas características y un coste muy similar pero es, en general, menos precisa.