INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

PRÁCTICA 5 **Curso 2024-2025**

1. Un ingeniero desea obtener una función continua que aproxime un conjunto de datos obtenidos experimentalmente. Los datos de que se dispone son:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1, & f(x_0) = 3 \\ x_1 = 3, & f(x_1) = 5 \\ x_2 = 6, & f(x_2) = 6 \end{array} \tag{1}$$

   Para ello se plantea:

   a) Obtener el polinomio interpolador que pasa por los puntos dato utilizando la base de polinomios canónica (Ecuaciones Normales).
   b) Obtener el polinomio interpolador que pasa por los puntos dato utilizando la base de polinomios de Lagrange.
   c) Para asegurarse la obtención del resultado correcto el ingeniero se plantea la comparación de los dos polinomios obtenidos en los apartados anteriores. ¿Son iguales los polinomios que se obtienen para los apartados a) y b)? Comprobar a su vez que los polinomios pasan por los puntos dato de interpolación.
   d) A la vista del resultado anterior, el ingeniero decide que los resultados obtenidos no se ajustan a lo esperado y se plantea una nueva estrategia. Dado que desde un punto de vista teórico sabe que los valores dato deben ajustarse a una recta se plantea tomar un mayor número de datos y calcular la recta de regresión mediante aproximación por mínimos cuadrados. Los datos utilizados en este caso son:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1, & f(x_0) = 3 \\ x_1 = 3, & f(x_1) = 5 \\ x_2 = 6, & f(x_2) = 6 \\ x_3 = 10, & f(x_3) = 9 \\ x_4 = 11, & f(x_4) = 10 \end{array} \tag{2}$$

   e) Introducir los datos del apartado anterior en una hoja de cálculo y obtener la recta de ajuste por mínimos cuadrados. Comprobar que la ecuación coincide con la obtenida en el apartado anterior.
   f) Repetir el cálculo del apartado d) teniendo en cuenta que todos los puntos tienen un coeficiente de ponderación unitario a excepción del último punto, que tiene un coeficiente de ponderación 2.

2. Calcular los pesos de integración para las cuadraturas de Newton-Cotes cerradas con 2 y 3 puntos de integración. ¿A qué algoritmos conocidos corresponden?

3. Un Ingeniero desea comprobar la fiabilidad de las cuadraturas de integración más habituales resolviendo una integral de la que se conoce su solución analítica:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx \tag{3}$$

Para ello se propone calcular la integral mediante varios métodos numéricos y comparar la solución obtenida con la solución analítica. Los métodos propuestos son:

- Cuadratura de Newton-Cotes cerrada con 3 puntos de integración
- Cuadratura de Newton-Cotes cerrada con 5 puntos de integración
- Método del trapecio compuesto con 4 subintervalos
- Método de Simpson compuesto con 2 subintervalos

Se pide:

a) Obtener numéricamente la aproximación de la integral propuesta con cada uno de los métodos propuestos anteriormente

b) ¿Qué algoritmo proporciona una mejor aproximación de la integral con un menor número de puntos de integración?

c) ¿Qué algoritmo resulta más sencillo en su aplicación?

d) ¿Coinciden los resultados con los esperados?

4. Un ingeniero está desarrollando un programa de ordenador para trazado de obras lineales (carreteras, ferrocarril, ...). Para calcular el volumen de material de desmonte y de terraplén que necesita mover para realizar la obra se plantea la utilización de un método numérico de integración. El programa de trazado que ha realizado le proporciona el área de las secciones de desmonte y de terraplén cada 20 m a lo largo de la traza de la obra. ¿Qué algoritmo sería adecuado teniendo en cuenta que se pretende obtener una estimación y que su aplicación debe ser lo más sencilla posible? ¿Cómo se plantearía la obtención de los volúmenes de material de desmonte y de material de terraplén a partir de las áreas en secciones equiespaciadas con el algoritmo anterior? Desarrollar su expresión.

5. Un ingeniero necesita desarrollar una herramienta de cálculo de integrales numéricamente que le permita abordar gran variedad de problemas de forma sencilla. Se pide:

a) Deducir la expresión general del método de Simpson compuesto utilizando $2p+1$ puntos de integración, de modo que su implementación en un programa de ordenador se pueda hacer de forma automática y sencilla.

b) Utilizar el algoritmo anterior para calcular la integral:

$$\int_0^2 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$

con 7 puntos de integración en total.

c) Realizar un programa de ordenador en lenguaje Fortran que permita realizar el análisis anterior de forma sencilla. Analizar el problema del apartado b) con valores de p crecientes y analizar las soluciones obtenidas.

6. Se desea calcular el valor de la integral de una serie de funciones continuas

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

con un método numérico que proporcione buenos resultados y sea sencillo. Para ello el ingeniero se plantea hacer un ejemplo concreto de prueba de cara a comprobar qué método es más aconsejable. Se pide:

a) Obtener un valor aproximado de la integral,

$$I = \int_2^5 \frac{1}{x} dx$$

mediante:

a.1) La cuadratura de Newton-Cotes cerrada con 3 puntos de integración obtenida en el apartado anterior

a.2) Una cuadratura de Newton-Cotes cerrada con 4 puntos de integración

a.3) La regla compuesta del trapecio para 5 puntos de integración

a.4) La regla compuesta de Simpson para 5 puntos de integración

a.5) Calcular el valor analítico de la integral y comparar el error obtenido con los métodos.

b) A partir de los resultados anteriores indicar justificadamente qué método sería el más recomendable con carácter general.