INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

PRÁCTICA 4 **Curso 2023-2024**

1. Cierto problema de ingeniería conduce a la utilización de la matriz simétrica:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Se pide:

   a) Proponer un esquema de almacenamiento eficiente para esta matriz.
   b) Desarrollar un algoritmo específico y eficiente que permita realizar el producto de matriz por vector para matrices con estructura similar a la propuesta.
   c) Aplicar en el algoritmo desarrollado en el apartado anterior el esquema de almacenamiento propuesto en el apartado a).
   d) Proponer un algoritmo que permita descomponer la matriz $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^T$ de forma eficiente.
   e) Aplicar el esquema de almacenamiento propuesto en el apartado a) en el algoritmo de factorización anterior.
   f) Proponer, a partir de la descomposición anterior, algoritmos eficientes para resolver un sistema del tipo $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
   g) Aplicar en estos algoritmos el esquema de almacenamiento propuesto.
   h) Desarrollar un programa de ordenador que permita resolver el sistema de ecuaciones propuesto para un vector de términos independientes $\boldsymbol{b}$ tal que $b_i = 1,\ i = 1, \ldots, n$ con $n \leq 30$

2. Dado el sistema de ecuaciones con matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1} & & & a_{n,n} \end{bmatrix} \tag{2}$$

   Se pide:

   a) Si es posible, desarrollar un algoritmo que permita resolver eficientemente el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ de forma directa sin necesidad de transformar previamente el problema.
   b) Deducir la complejidad computacional (mediante el número de operaciones requerido) del algoritmo resultante.

3. Se desea resolver un sistema de ecuaciones con matriz $\boldsymbol{A}$ mediante un método de eliminación de Gauss. La matriz $\boldsymbol{A}$ se define como:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & \\ 1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Se pide:

a) Desarrollar completamente el algoritmo de eliminación de Gauss sin pivotamiento. ¿Es posible realizar el algoritmo anterior de forma eficiente sin incrementar el ancho de banda de la matriz?

b) Proponer y desarrollar un algoritmo eficiente que permita resolver el sistema de ecuaciones resultante tras aplicar el Método propuesto en el apartado a).

c) Desarrollar completamente el algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan. ¿Es posible realizar el algoritmo anterior de forma eficiente sin incrementar el ancho de banda de la matriz?

4. La resolución de un determinado sistema de ecuaciones lineales ($\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$) nos proporciona valores puntuales de la solución de un determinado problema en un conjunto de n puntos (x_i, $i = 1, \ldots, n$) equiespaciados en el intervalo [0,1], donde $x_1 = 0$ y $x_n = 1$. La matriz del sistema de ecuaciones corresponde a una matriz triangular inferior con estructura en banda y semiancho de banda inferior $l = 2$:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & & & & & \\ l_{2,1} & l_{2,2} & & & & \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} & & & \\ & l_{4,2} & l_{4,3} & l_{4,4} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & l_{n,n-2} & l_{n,n-1} & l_{n,n} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Se pide:

a) Desarrollar completamente un algoritmo eficiente de resolución del sistema con matriz triangular inferior ($\boldsymbol{L}$) que nos permita obtener $\boldsymbol{y}$ a partir de $\boldsymbol{b}$.

b) Desarrollar completamente un esquema de almacenamiento eficiente para esta matriz y aplicar este esquema en el algoritmo de resolución propuesto en el apartado anterior.

5. El análisis de la flexión estructural de una viga empotrada en ambos extremos sometida a una carga transversal a su eje viene determinada por un sistema de ecuaciones con matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & & & \\ -4 & 6 & -4 & \ddots & & \\ 1 & -4 & 6 & \ddots & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & -4 & 1 \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Se pide:

a) Plantear y desarrollar un algoritmo eficiente de factorización que permita descomponer la matriz $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{LDL}^T$.

b) Proponer, a partir de la factorización anterior, algoritmos eficientes para resolver un sistema del tipo $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

b) Proponer un esquema de almacenamiento eficiente que tenga en cuenta las características particulares de esta matriz.

6. Dado el sistema de ecuaciones con matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{n,n} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Se pide:

a) Describir la forma general de la matriz $\boldsymbol{U}$ que se obtiene como resultado de descomponer la matriz $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{LDU}$.

b) Si es posible, desarrollar un algoritmo que permita resolver el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ de forma directa?

7. Un ingeniero desea resolver sistemas de ecuaciones en los que la matriz presenta la siguiente forma:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & & & & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & & & a_{2,n} \\ a_{3,1} & & a_{3,3} & & & a_{3,n} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & & & & & a_{n,n} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Se pide:

a) Si se pretende realizar el producto de esta matriz por un vector, indicar justificadamente si es posible utilizar un esquema de almacenamiento específico y singular para este caso en el que sólo se almacenen los coeficientes no nulos de la matriz.

b) Indicar la forma que tendrán, en general, las matrices que se obtendrán como resultado de descomponer la matriz como $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LDU}$.

c) Desarrollar completamente un algoritmo específico y eficiente de resolución del sistema de ecuaciones $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{b}$, siendo $\boldsymbol{b}$ el vector de términos independientes, $\boldsymbol{x}$ la solución buscada y $\boldsymbol{U}$ la matriz triangular superior obtenida como resultado de factorizar la matriz $\boldsymbol{A}$.

8. Un ingeniero necesita resolver un sistema de ecuaciones con matriz:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & & a_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{8}
$$

Se pide:

a) Si se pretende descomponer la matriz $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{LDU}$, indicar qué forma tendrían las matrices.

b) Desarrollar completamente el algoritmo que permite resolver el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{b}$ siendo $\boldsymbol{U}$ la matriz resultante de factorizar la matriz $\boldsymbol{A}$.

c) Indicar de forma justificada si el método de eliminación de Gauss sin pivotamiento permitiría resolver el sistema de ecuaciones con matriz $\boldsymbol{A}$ de forma eficiente sin operar con los coeficientes nulos.