INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS 2024/2025

Cálculo de raíces de una ecuación (PRÁCTICA 3)

1. Proponer de forma justificada una aproximación inicial para el cálculo de las raíces de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \tan(x) - x;\ x > 0$

   b) $f(x) = x - \cos(x) - 1$

   c) $f(x) = \tan(x) + \mu x, \quad \mu > 1;\ x > 0$

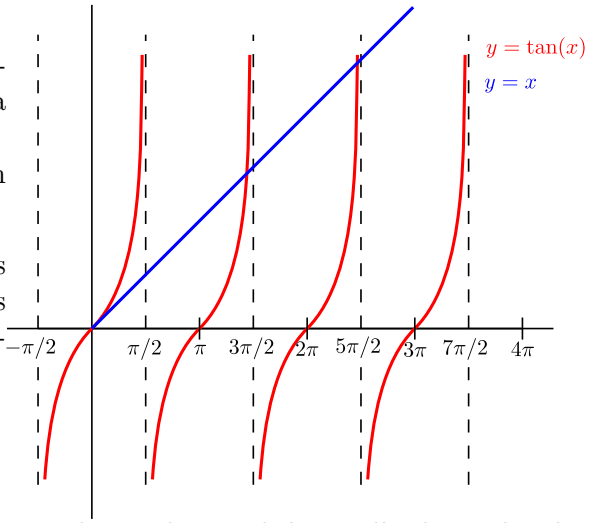
   d) $f(x) = \ln(x) - \ln(1-x) + 5(1+x)$, para $|x| << 1$

   e) $f(x) = \cosh(x) - x - 2$

Solución 1.a $f(x) = \tan(x) - x; \quad x > 0$

Si se busca $f(x) = \tan(x) - x = 0$, podemos igualar $\tan(x) = x$ y representar ambas funciones para buscar los posibles puntos de corte.
La función $\tan(x)$ presenta asíntontas verticales en $x = \dfrac{2n+1}{2}\pi$.
De forma aproximada podemos asociar los cortes con la recta $y = x$ cerca de los valores de esas asíntotas, de modo que serían posibles aproximaciones iniciales:

$$x_0(\alpha_1) \approx \frac{3\pi}{2}, \quad x_0(\alpha_2) \approx \frac{5\pi}{2}, \quad x_0(\alpha_3) \approx \frac{7\pi}{2}, \ldots$$



Podríamos por otra parte, buscar aproximaciones iniciales mediante el desarrollo de Taylor de la función $\tan(x)$.

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$$

necesitaríamos al menos los tres primeros términos, sustituyéndolos en $f(x) = 0$:

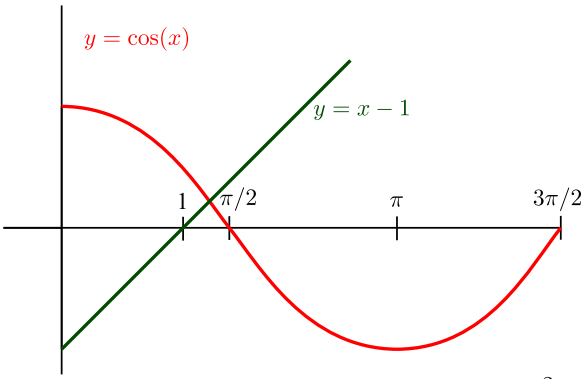
$$(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}) - x = 0 \quad \Rightarrow \quad +\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{5}{2}$$

en este caso no nos valdría para obtener una aproximación inicial ya que estamos utilizando el desarrollo de Taylor de la función en torno a $x = 0$ y la primera raíz está significativamente alejada de ese punto.

Solución 1.b $f(x) = x - \cos(x) - 1$

Si se busca $f(x) = x - \cos(x) - 1 = 0$, podemos igualar $\cos(x) = x - 1$ y representar ambas funciones para buscar los posibles puntos de corte.
De forma aproximada podemos ver que la raíz se encuentra dentro del intervalo $[1, \pi/2]$, podríamos escoger cualquiera de los dos valores como aproximación inicial.

$$x_0 = 1 \qquad \text{ó} \qquad x_0 = \pi/2$$



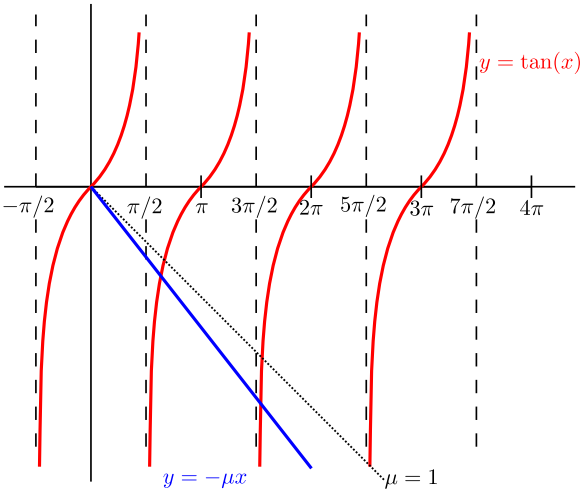
Podríamos dar una aproximación más precisa mediante el desarrollo de Taylor de $\cos(x) \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$

$$x_0 - \left(1 - \frac{x_0^2}{2}\right) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{1} = \begin{cases} -1 + \sqrt{5} \approx 1{,}236 \\ -1 - \sqrt{5} \approx \cancel{-3{,}236} \end{cases}$$

Solución 1.c $f(x) = \tan(x) + \mu x, \quad \mu > 1;\ x > 0$

Este caso es similar al del apartado a) pero los puntos de corte se producen en las ramas inferiores de las asíntotas.
De forma aproximada podemos asociar los cortes con la recta $y = -\mu x$ cerca de los valores de esas asíntotas, de modo que serían posibles aproximaciones iniciales:

$$x_0(\alpha_1) \approx \frac{\pi}{2}, \quad x_0(\alpha_2) \approx \frac{3\pi}{2}, \quad x_0(\alpha_3) \approx \frac{5\pi}{2}, \ldots$$



Solución 1.d $f(x) = \ln(x) - \ln(1-x) + 5(1+x); \quad |x| << 1$

En este caso es considerablemente más difícil hacer una estimación gráfica de la raíz. Dado que nos dicen que $|x| << 1$ podremos despreciar algunos de los términos de la función:

$$f(x) = \ln(x) - \ln(1-x) + 5(1+x)\Big|_{|x|<<1} \approx \ln(x) - \ln(1) + 5(1) = \ln(x) + 5$$

como buscamos una aproximación inicial al a raíz de la función:

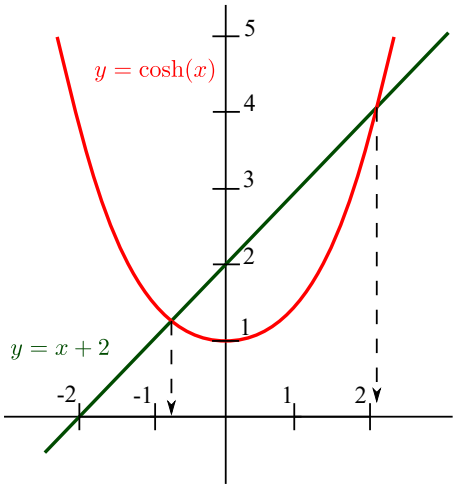
$$\ln(x_0) + 5 = 0 \quad \Rightarrow x_0 = e^{-5}$$

Solución 1.e $f(x) = \cosh(x) - x - 2$

De nuevo, despejando de la función $f(x)$,

$$\cosh(x) = x + 2$$

si dibujamos ambas funciones podemos ver dos puntos de intersección, que se corresponderían con las raíces, uno cercano a -1 y otro cercano a 2.
Podríamos tomar esos valores como aproximaciones iniciales para buscar las raíces.



Si lo planteásemos mediante el desarrollo en serie de Taylor del $\cosh(x) \approx 1 + \dfrac{x^2}{2}$:

$$1 + \frac{x_0^2}{2} - x_0 - 2 = 0 \quad \Rightarrow x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0 \quad \Rightarrow x_0 = \begin{cases} 1 + \sqrt{3} = 2{,}73 \\ \\ 1 - \sqrt{3} = -0{,}732 \end{cases}$$

En este caso no serían demasiado buenas aproximaciones iniciales ya que estamos usando del desarrollo de Taylor en torno a 0 y las raíces no son cercanas a ese valor.

---

2. Se sabe que el polinomio $P(x) = x^4 + 6x - 1$ tiene una raíz real α, tal que $0 < \alpha < 0{,}2$

   a) Calcular para qué valores de la constante ϕ es asintóticamente convergente el algoritmo iterativo:
   $$x_{k+1} = x_k - \phi P(x_k)$$
   b) Proponer un valor inicial para la sucesión.
   c) Obtener la raíz del problema partiendo de la aproximación inicial propuesta para un valor adecuado de la constante ϕ
   d) Plantear la obtención de la raíz mediante el método de Newton a partir de la aproximación inicial obtenida en b).
   e) Realizar un programa de ordenador que realice los cálculos para los dos apartados anteriores. Imponer un criterio de convergencia del método que permita obtener la solución con 10 cifras significativas exactas.

Solución 2.a Nos plantean la obtención de la raíz mediante un método de aproximaciones sucesivas de la forma:

$$x_{k+1} = \underbrace{x_k - \phi P(x_k)}_{\Phi(x_k)}$$

Sabemos que para que sea asintóticamente convergente se ha de cumplir que $|\Phi'(\alpha)| < 1$, por tanto:

$$\Phi'(x) = 1 - \phi\, P'(x) = 1 - \phi\,(4x^3 + 6)$$

Se tiene que cumplir por tanto:

$$\begin{array}{rcccl} -1 & < & 1-\phi(4\alpha^3+6) & < & 1 \\ -2 & < & -\phi(4\alpha^3+6) & < & 0 \\ 0 & < & \phi(4\alpha^3+6) & < & 2 \\ 0 & < & \phi & < & \dfrac{2}{4\alpha^3+6} \end{array}$$

Dado que nos dicen que $0 < \alpha < 0{,}2$, tomamos el valor más restrictivo que asegure que el método es asintóticamente convergente, es decir $\alpha \to 0{,}2$, por tanto:

$$\boxed{0 < \phi < 0{,}331565}$$

Solución 2.b De forma sencilla, y dado que sabemos que $0 < \alpha < 0{,}2$, podemos asumir que los términos de orden más alto son despreciables frente a los de orden más bajo, y podríamos calcular la aproximación inicial como:

$$6\,x_0 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{6}$$

Solución 2.c,d Para el método de aproximaciones sucesivas utilizamos por ejemplo un valor de $\phi = 0{,}25$ el cual debería asegurar la convergencia según lo dictado en el apartado anterior, por lo tanto plantearemos las iteraciones como:

$$x_{k+1} = x_k - 0{,}25(x_k^4 + 6x_k - 1)$$

En cuanto al método de Newton este se plantea de la forma:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

donde en este caso, la función se corresponde con el polinomio $P(x)$ del cuál queremos calcular la raíz, por tanto, el método de Newton será:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^4 + 6x_k - 1}{4x_k^3 + 6}$$

x_i	Aprox. suc.	Newton
x_0	0.166666666667	0.166666666667
x_1	0.166473765432	0.166538461538
x_2	0.166571107561	0.166538461084
x_3	0.166521987008	0.166538461084
x_4	0.166546774203	
x_5	0.166534266123	
$\vdots$	$\vdots$	
x_{32}	0.166538461084	
x_{33}	0.166538461084	

Solución 2.e

```
implicit integer*4(i-n)
implicit real*8(a-h,o-z)

x_as=1.0d+00/6.0d+00
x_new=1.0d+00/6.0d+00

x_as_old=0.0d+00
x_new_old=0.0d+00

tol=1.0d-11

phi=0.25

icont_as=0
icont_new=0

do while(dabs(x_as-x_as_old).gt.tol)
   x_as_old=x_as
   p=x_as_old**4+6*x_as_old-1
   x_as=x_as_old-phi*p
   icont_as=icont_as+1
   write(6,*)'A_S',icont_as,x_as
enddo

do while(dabs(x_new-x_new_old).gt.tol)
   x_new_old=x_new
   p=x_new_old**4+6*x_new_old-1
   p_der=3*x_new_old**4+6
   x_new=x_new_old-p/p_der
   icont_new=icont_new+1
   write(6,*)'Newton',icont_new,x_new
enddo

read(5,*)

end
```

---

3. Un ingeniero proyecta la construcción de un puente arco simétrico de 400 m de longitud de vano. Desde un punto de vista estructural la geometría del arco más adecuada corresponde a la definida por la función:

$$y(x) = \frac{-5(x-200)^2}{2000} + 100$$

tomando como origen de coordenadas la cimentación del arco del puente. Sin embargo, el trazado de la carretera que discurre sobre el puente tiene que pasar necesariamente a una altura constante de 60 m. Por tanto, se pide:

a) Obtener una aproximación inicial de las coordenadas x en las que se cruzará el arco con el trazado de la carretera.

b) Si se asume que no se pueden calcular raíces cuadradas, proponer un algoritmo de aproximaciones sucesivas que nos permita obtener la coordenada de la intersección del arco con el tablero del puente.

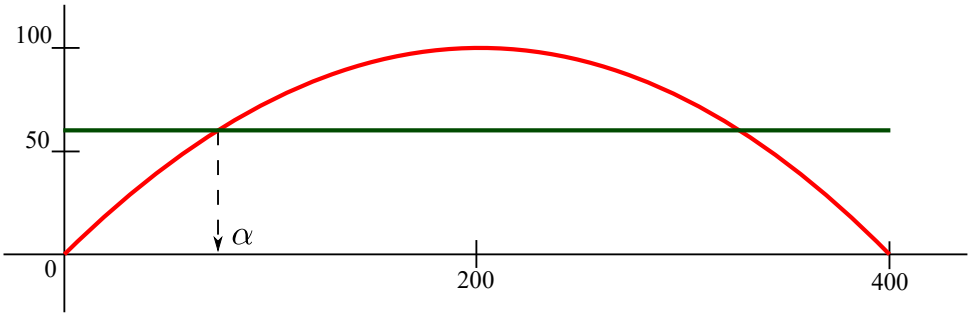
c) Realizar un estudio asintótico de convergencia para este algoritmo. Proponer, en el caso de que el algoritmo anterior no resulte adecuado, un algoritmo de aproximaciones sucesivas alternativo que sea asintóticamente convergente.

d) Plantear la obtención de las coordenadas mediante el método de Newton.

e) Realizar un programa de ordenador que calcule la solución del problema mediante el método de aproximaciones sucesivas y mediante el método de Newton partiendo de la aproximación inicial $x_0 = 100$. ¿Coinciden los resultados obtenidos con los esperados? ¿Se comportan los algoritmos de la forma esperada?

NOTA: Considérese un criterio de convergencia para todos los algoritmos iterativos que permita obtener la solución con 12 cifras significativas exactas.

Solución 3.a Podemos dibujar la parábola que define el arco del puente y el trazado a la cota 60 m:



De forma aproximada podríamos utilizar como aproximación inicial el valor $x_0 = 100$.

Solución 3.b Para calcular el punto de corte hay que plantear:

$$60 = \frac{-5(x-200)^2}{2000} + 100 \quad \Leftrightarrow \quad 40 - \frac{5(x-200)^2}{2000} \quad \Leftrightarrow 80000 = 5(x-200)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 400x + 24000 = 0$$

Como nos dicen en el enunciado que no podemos calcular raíces cuadradas tenemos que plantear la solución de la ecuación de segundo grado de forma iterativa. Podemos despejar el término que no está elevado al cuadrado de la forma:

$$x = \frac{x^2}{400} + 60$$

y plantear nuestro algoritmo de iteración funcional como:

$$x_k = \frac{x_k^2}{400} + 60$$

Solución 3.c Analizamos la convergencia asintótica del algoritmo de aproximaciones sucesivas propuestas, para ello tendremos que comprobar que se cumple $|\phi'(\alpha)| < 1$:

$$\phi(x) = \frac{x^2}{400} + 60 \quad \Rightarrow \quad \phi'(x) = \frac{x}{200}$$

Sabemos que $\alpha < 200$ por lo tanto se cumple que

$$|\phi'(\alpha)| = \left|\frac{\alpha}{200}\right| < 1$$

Y por lo tanto el algoritmo será asintóticamente convergente y en este caso lineal.

Solución 3.d Planteamos el método de Newton teniendo en cuenta que en este caso la función de la cuál buscamos la raíz es $f(x) = x^2 - 400x + 24000$, por tanto el método será:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 400x_k + 24000}{2x_k - 400}$$

Solución 3.e Los resultados de ambos algoritmos serán:

x_i	Aprox. suc.	Newton
x_0	100	100
x_1	85	70
x_2	78.0625	73.4615384615350
x_3	75.2343847656250	73.5088847322890
x_4	74.1505316276553	73.5088935932645
x_5	73.7457533516598	73.5088935932648
$\vdots$	$\vdots$	
x_{34}	73.5088935932649	
x_{35}	73.5088935932649	

```
implicit integer*4(i-n)
implicit real*8(a-h,o-z)

x0=100.0d+00
xN=0.0d+00
xA=0.0d+00

iteraN=0
iteraA=0

write(6,*)'introduzca tolerancia'
read(5,*)tol

write(6,*)'Aproximaciones sucesivas:'
write(6,*)'k= ',0,'x_k= ',x0

dif=dabs(xA-x0)
do while(dif.gt.tol)
```

```
   iteraA=iteraA+1
   xA=(x0**2/400.0d+00)+60.0d+00
   write(6,*)'k= ',iteraA,'x_k= ',xA
   dif=dabs(xA-x0)
   x0=xA
enddo

x0=100.0d+00

write(6,*)'Metodo de Newton:'
write(6,*)'k= ',0,'x_k= ',x0

dif=dabs(xN-x0)
do while(dif.gt.tol)
   iteraN=iteraN+1
   x1=x0**2-400.0d+00*x0+24000.0d+00
   x2=2.0d+00*x0-400.0d+00
   xN=x0-x1/x2
   write(6,*)'k= ',iteraN,'x_k= ',xN
   dif=dabs(xN-x0)
   x0=xN
enddo

read(5,*)
end
```

---

4. Para resolver un problema de ingeniería es necesario hallar la primera raíz positiva de la función

$$f(x) = x - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Para calcular la raíz se propone la utilización de un método de iteración funcional.

Teniendo presente lo anterior, se pide:

a) Proponer un valor inicial aproximado de la raíz del problema planteado y justificarlo.

b) Proponer un método de aproximaciones sucesivas que sea asintóticamente convergente y comprobar que lo es.

c) Plantear la obtención de la primera raíz positiva de f por el método de Newton.

d) Calcular los tres primeros términos (x_1, x_2, x_3) de la sucesión obtenida mediante el algoritmo de aproximaciones sucesivas y mediante el método de Newton. Utilizar en ambos casos la aproximación inicial $x_0 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Comparar los resultados obtenidos por ambos métodos. ¿Coinciden los resultados con las predicciones teóricas?

e) Desarrollar un programa de ordenador en lenguaje Fortran que permita realizar el cálculo propuesto en el apartado anterior para el método de Newton y que muestre los valores calculados por pantalla.

Solución 4.a Podemos intentar obtener una aproximación inicial mediante el desarrollo en serie de Taylor de la función $\cos(2x)$.

$$\cos(2x) \approx 1 - \frac{(2x)^2}{2} + ...$$

sustituyéndolo en $f(x) = 0$:

$$x_0 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4x_0^2}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow x_0^2 + x_0 - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow x_0 = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} = 0{,}366 \\ \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} = -1{,}366 \end{array} \right\}$$

Por la forma de la función únicamente es válida la solución positiva, por lo tanto podemos usar $x_0 = 0{,}366$.

Solución 4.b La forma más sencilla en este caso es despejar x de la expresión $f(x) = 0$, por tanto.

$$x = \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Por lo tanto el esquema de iteración funcional será:

$$x_k = \underbrace{\frac{1}{2}\cos(2x_k)}_{\phi(x_k)}$$

comprobamos la convergencia asintótica:

$$\phi'(x) = \frac{-2\sin(2x)}{2} = -\sin(2x) \quad \Rightarrow \quad |\phi'(\alpha)| = |\sin(2\alpha)| < 1 \text{ salvo para } \alpha = \pi/4$$

Pero por la aproximación inicial sabemos que $\alpha \neq \pi/4$, por tanto el método es asintóticamente convergente, y de orden lineal.

Solución 4.c Planteamos el método de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k - \frac{1}{2}\cos(2x_k)}{1 + \sin(2x_k)}$$

Solución 4.d Calculamos hasta convergencia con los dos métodos:

x_i	Aprox. suc.	Newton
x_0	0.3660254038	0.3660254038
x_1	0.3719026075	0.3695480700
x_2	0.3679487040	0.3695425666
x_3	0.3706143322	0.3695425666
$\vdots$	$\vdots$	
x_{47}	0.3695425666	

Solución 4.e

```
implicit integer*4(i-n)
implicit real*8(a-h,o-z)

x0=(-1.0d+00+sqrt(3.0d+00))/2.0d+00
```

```
x=0.0d+00

write(6,*)'introduzca iteraciones maximas'
read(5,*)itermax

write(6,*)'k= ',0,'x_k= ',x0

do i=1,itermax
   x1=x0-0.5d+00*dcos(2.0d+00*x0)
   x2=1.0d+00+dsin(2.0d+00*x0)
   x=x0-x1/x2
   write(6,*)'k= ',i,'x_k= ',x
   x0=x
enddo

read(5,*)
end
```

---

5. Para resolver un problema de ingeniería es necesario hallar la primera raíz positiva de la función

$$f(x) = x\tan(x) - 1.$$

Para calcular la raíz se empleará un método de iteración funcional.

Teniendo presente lo anterior, se pide:

a) Proponer un método de aproximaciones sucesivas que sea asintóticamente convergente y comprobar que lo es.

b) Plantear la obtención de la primera raíz positiva de f por el método de Newton.

c) Calcular la primera raíz positiva de f mediante el algoritmo de aproximaciones sucesivas y mediante el método de Newton. Utilizar en ambos casos la aproximación inicial $x_0 = 1$. Comparar los resultados obtenidos por ambos métodos. ¿Coinciden los resultados con las predicciones teóricas?

Solución 5.a

De la expresión $f(x) = 0$ podemos despejar de dos formas:

$$x\tan(x)-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/\tan(x) & \Rightarrow \quad \phi'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(x)} & \Rightarrow \quad |\phi'(\alpha)| = \left|\dfrac{-1}{\sin^2(\alpha)}\right| \\ x = \arctan(1/x) & \Rightarrow \quad \phi'(x) = \dfrac{-1/x^2}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{-1}{x^2+1} & \Rightarrow \quad |\phi'(\alpha)| = \left|\dfrac{-1}{\alpha^2+1}\right| \end{cases}$$

Se puede comprobar entonces como el primero de los esquemas de iteración funcional será divergente y el segundo convergente, por lo tanto el método de aproximaciones sucesivas asintóticamente convergente será:

$$x_{k+1} = \arctan(1/x_k)$$

Solución 5.b Para plantear el método de Newton necesitaremos la derivada de la función:

$$f'(x) = \tan(x) + \frac{x}{\cos^2(x)}$$

El esquema de Newton será:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{x_k \tan(x_k) - 1}{\tan(x_k) + \dfrac{x_k}{\cos^2(x_k)}} \\ &= x_k + \frac{\cos^2(x_k)(x_k \tan(x_k) - 1)}{\sin(x_k)\cos(x_k) + x_k} \\ &= \frac{x_k \sin(x_k \cos(x_k) + x_k^2 - \cos^2(x_k)(x_k \tan(x_k) - 1)}{\sin(x_k)\cos(x_k) + x_k} \\ &= \boxed{\frac{x_k^2 + \cos^2(x_k)}{\sin(x_k)\cos(x_k) + x_k)}} \end{aligned}$$

Solución 5.c Calculamos mediante los dos métodos propuestos a partir de $x_0 = 1$

x_i	Aprox. suc.	Newton
x_0	1	1
x_1	0.7853981634	0.8881364757
x_2	0.9050225768	0.8614646182
x_3	0.8352132406	0.8603354768
x_4	0.8749496224	0.8603335890
x_5	0.8519948603	0.8603335890
$\vdots$	$\vdots$	
x_{42}	0.8603335890	

Los resultados coinciden con las predicciones teóricas. La convergencia del método de Newton es mucho más rápida que el de aproximaciones sucesivas. El método de Newton presenta convergencia cuadrática y el método de aproximaciones sucesivas planteado es lineal.

---

6. Se desean estudiar las propiedades de un algoritmo de iteración funcional para el problema $f(x) = 0$ de modo que mejore en la medida de lo posible su comportamiento. El algoritmo se define como:

$$\phi(x) = x + \sum_{i=1}^{n} a_i \left(f(x)\right)^i$$

Se pide:

a) Deducir el coeficiente a_1 de modo que el algoritmo resultante tenga el mayor orden de convergencia posible para $n = 1$

b) Repetir el cálculo anterior y obtener los coeficientes a_1 y a_2 para $n = 2$

Solución 6.a Para $n = 1$ el método planteado será:

$$x_k + 1 = \phi(x_k) \qquad \text{con} \quad \phi(x) = x + a_1\, f(x)$$

Calculamos el factor asintótico de convergencia:

$$\phi'(x) = 1 + a_1\, f'(x)$$

Si queremos que el algoritmo sea lo mejor posible ha de cumplir $|\phi'(\alpha)| = 0$, es decir:

$$|1 + a_1\, f'(\alpha)| = 0 \quad \Rightarrow a_1 = \frac{-1}{f'(\alpha)}$$

Solución 6.b Para $n = 2$ el método planteado será:

$$x_k + 1 = \phi(x_k) \qquad \text{con} \quad \phi(x) = x + a_1\, f(x) + a_2\, (f(x))^2$$

De nuevo calculamos el factor asintótico de convergencia,

$$\phi'(x) = 1 + a_1\, f'(x) + 2\, a_2\, f(x) f'(x)$$

para despejar las dos constantes e imponer que el método sea lo mejor posible, imponemos $\phi'(\alpha) = 0$ y $\phi''(\alpha) = 0$. De este modo el método será de orden cúbico.

$$\phi'(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + a_1\, f'(\alpha) + 2\, a_2\, \cancel{f(\alpha)} f'(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{f'(\alpha)}$$

$$\phi''(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1\, f''(\alpha) + 2\, a_2 (f'(\alpha))^2 + 2\, a_2 \cancel{f(\alpha)} f''(\alpha) = 0$$

teniendo en cuenta el valor obtenido de a_1:

$$-\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + 2\, a_2 (f'(\alpha))^2 = 0 \quad \Rightarrow a_2 = \frac{f''(\alpha)}{2(f'(\alpha))^3}$$

El método de iteración funcional cúbico propuesto será:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x)}{f'(\alpha)} + \frac{f''(\alpha)}{2(f'(\alpha))^3}(f(x_k))^2}$$

---

7. Para resolver un problema de ingeniería es necesario hallar la (única) raíz de la función

$$f(x) = x\ \ln(x) - 1$$

Para calcular la raíz se propone la utilización de un método de iteración funcional.

Teniendo presente lo anterior, se pide:

a) Proponer una aproximación inicial de la raíz del problema de forma justificada.

b) Proponer un método de aproximaciones sucesivas que sea asintóticamente convergente y comprobar que lo es.

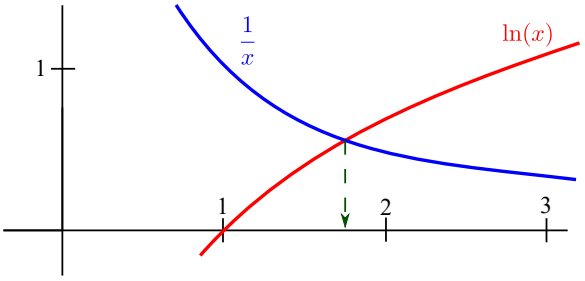
c) Plantear la obtención de la raíz de f por el método de Newton.

d) Calcular los cinco primeros términos de la sucesión obtenida mediante el algoritmo de aproximaciones sucesivas y mediante el método de Newton. Utilizar en ambos casos la aproximación inicial $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Comparar los resultados obtenidos por ambos métodos. ¿Coinciden los resultados con las predicciones teóricas?

e) Desarrollar un programa de ordenador en lenguaje Fortran que permita obtener la raíz mediante el método de Newton y que muestre los resultados. Se fijará un número de iteraciones máximo a realizar por el programa.

Solución 7.a

Si se busca $f(x) = x\ln(x) - 1 = 0$, podemos igualar $\ln(x) = 1/x$ y representar ambas funciones para buscar los posibles puntos de corte.
De forma aproximada podemos ver que la raíz se encuentra dentro del intervalo $[1, 2]$, podríamos escoger cualquiera de los dos valores como aproximación inicial.



$$x_0 = 1 \qquad \text{ó} \qquad x_0 = 2$$

Podemos utilizar el desarrollo en serie de la función $\ln(x)$ en torno a 1:

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) \quad \rightarrow \ln(x) \approx (x-1) \quad \Rightarrow \quad x_0(x_0-1) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618034 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \cancel{-0{,}618034} \end{cases}$$

Solución 7.b De la expresión $f(x) = 0$ podemos despejar de dos formas:

$$x\ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\ln(x)} \quad \Rightarrow \quad \phi'(x) = -\dfrac{1}{x(\ln(x))^2} \quad \Rightarrow \quad |\phi'(\alpha)| = \left|\dfrac{1}{\alpha(\ln(\alpha))^2}\right| \\ x = e^{1/x} \quad \Rightarrow \quad \phi'(x) = \dfrac{-e^{1/x}}{x^2} \quad \Rightarrow \quad |\phi'(\alpha)| = \left|\dfrac{e^{1/\alpha}}{\alpha^2}\right| \end{cases}$$

Podemos analizar el primero de los algoritmos teniendo en cuenta que $\ln(\alpha) = 1/\alpha$ luego:

$$\left|\frac{1}{\alpha(\ln(\alpha))^2}\right| = \left|\frac{\alpha^2}{\alpha}\right| > 1$$

Por lo tanto el primer método será divergente. El segundo método al ser el inverso del primero será automáticamente asintóticamente convergente, lo comprobamos:

$$\left|\frac{e^{1/\alpha}}{\alpha^2}\right| = \left|\frac{\alpha}{\alpha^2}\right| < 1$$

Solución 7.c La expresión del método de Newton será:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k \ln(x_k) - 1}{\ln(x_k) + 1} = x_k \left(1 - \frac{\ln(x_k) - 1/x_k}{\ln(x_k) + 1}\right) = \frac{x_k + 1}{\ln(x_k) + 1}$$

Solución 7.d Calculamos las cinco primeras iteraciones mediante los dos métodos propuestos.

x_i	Aprox. suc.	Newton
x_0	1.6180339887	1.6180339887
x_1	1.8552769586	1.7674946584
x_2	1.7142969977	1.7632261260
x_3	1.7919949453	1.7632228344
x_4	1.7472398048	1.7632228344
x_5	1.7723941921	1.7632228344
⋮	⋮	

Como era de esperar, el método de Newton es más rápido dada su convergencia cuadrática comparado con el orden lineal del método de aproximaciones sucesivas propuesto.

Solución 7.e

```
implicit integer*4(i-n)
implicit real*8(a-h,o-z)

x0=(1.0d+00+sqrt(5.0d+00))/2.0d+00
x=0.0d+00

write(6,*)'introduzca iteraciones maximas'
read(5,*)itermax

write(6,*)'k= ',0,'x_k= ',x0

do i=1,itermax
   x1=x0+1.0d+00
   x2=log(x0)+1.0d+00
   x=x1/x2
   write(6,*)'k= ',i,'x_k= ',x
   x0=x
enddo

read(5,*)
end
```

---

8. Para resolver un problema de ingeniería es necesario hallar la raíz de la función

$$f(x) = x + \ln(x).$$

Se pide:

a) Estudiar la convergencia asintótica del algoritmo de aproximaciones sucesivas

$$x_{k+1} = \Phi_1(x_k); \quad \Phi_1(x) = -\ln(x).$$

b) Estudiar la convergencia asintótica del algoritmo de aproximaciones sucesivas

$$x_{k+1} = \Phi_2(x_k); \quad \Phi_2(x) = e^{-x}.$$

c) Plantear la obtención de la raíz por el método de Newton.

d) Utilizando la aproximación inicial $x_0 = 1/2$, calcular las cinco primeras iteraciones de los algoritmos descritos en los apartados anteriores. ¿Concuerdan los resultados obtenidos con las predicciones teóricas? ¿Cuál parece el algoritmo más adecuado? ¿Por qué?

Solución 8.a Dado que buscamos la raíz de la función, es decir $x + \ln(x) = 0$, se cumple que:

$$x = -\ln(x) \quad \Rightarrow \text{ en } \alpha \quad \Rightarrow \alpha = -\ln(x) \Leftrightarrow \alpha = e^{-\alpha}$$

Comprobamos la convergencia asintótica del algoritmo propuesto:

$$\Phi_1'(x) = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad |\Phi_1'(\alpha)| = \left|\frac{1}{\alpha}\right| = \left|\frac{1}{e^{-\alpha}}\right| = |e^{\alpha}| > 1 \quad \text{ya que } \alpha > 0$$

Por lo tanto el método de aproximaciones sucesivas con $\Phi_1(x_k)$ es divergente.

Solución 8.b Comprobamos la convergencia asintótica del algoritmo propuesto:

$$\Phi_2'(x) = -e^{-x} \quad \Rightarrow \quad |\Phi_2'(\alpha)| = \left|e^{-\alpha}\right| = \left|\frac{1}{e^{\alpha}}\right| < 1 \quad \text{ya que } \alpha > 0$$

Por lo tanto el método de aproximaciones sucesivas con $\Phi_2(x_k)$ es asintóticamente convergente.

Solución 8.c El esquema iterativo del método de Newton será:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k + \ln(x_k)}{1 + \dfrac{1}{x_k}} = \frac{x_k + 1 - x_k - \ln(x_k)}{1 + \dfrac{1}{x_k}} = \frac{1 - \ln(x_k)}{1 + \dfrac{1}{x_k}}$$

Solución 8.d Calculamos las cinco primeras iteraciones mediante el método de aproximaciones sucesivas asintóticamente convergente y el método de Newton Como era de esperar, el método de

x_i	Aprox. suc.	Newton
x_0	0.5	0.5
x_1	0.6065306597	0.5643823935
x_2	0.5452392119	0.5671389877
x_3	0.5797030949	0.5671432904
x_4	0.5600646279	0.5671432904
x_5	0.5711721490	0.5671432904
$\vdots$	$\vdots$	

Newton converge muy rápidamente, debido a su convergencia cuadrática, mientras que el método de aproximaciones sucesivas, lineal, necesita un mayor número de iteraciones.

---

9. Para resolver un problema de ingeniería es necesario hallar la única raíz de la función

$$f(x) = \mathrm{e}^x \ \ln(x) - 1$$

Para calcular la raíz se propone la utilización de un método de iteración funcional.

Teniendo presente lo anterior, se pide:

a) Proponer una aproximación inicial de la raíz del problema de forma justificada.

b) Proponer un método de aproximaciones sucesivas que sea asintóticamente convergente y comprobar que lo es.

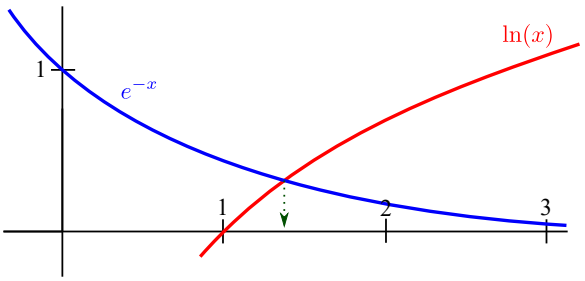
c) Plantear la obtención de la raíz de f por el método de Newton.

d) Calcular los cinco primeros términos de la sucesión obtenida mediante el algoritmo de aproximaciones sucesivas y mediante el método de Newton. Utilizar en ambos casos la aproximación inicial $x_0 = \sqrt{3}$. Comparar los resultados obtenidos por ambos métodos. ¿Coinciden los resultados con las predicciones teóricas?

e) Desarrollar un programa de ordenador en lenguaje Fortran que permita obtener la raíz mediante el método de aproximaciones sucesivas y que muestre los resultados en la pantalla del ordenador. El programa finalizará el proceso iterativo cuando la diferencia de la aproximación entre dos iteraciones consecutivas en valor absoluto sea menor a un cierto valor predefinido por el usuario.

Solución 9.a

Si se busca $f(x) = e^x \ln(x) - 1 = 0$, podemos igualar $\ln(x) = e^{-x}$ y representar ambas funciones para buscar los posibles puntos de corte.
De forma aproximada podemos ver que la raíz se encuentra dentro del intervalo $[1, 2]$. De forma aproximada podríamos tomar como aproximación inicial $x_0 = 1{,}5$.



Si utilizamos el primer término de los desarrollos de Taylor en torno a 1 de ambas funciones:

$$\ln(x) \approx (x-1) \qquad ; \qquad e^{-x} \approx e^{-1}$$

Podemos obtener una aproximación inicial como:

$$x_0 - 1 = e^{-1} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1{,}368$$

Solución 9.b De la expresión $f(x) = 0$ podemos despejar de dos formas:

$$e^x \ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} e^x = \dfrac{1}{\ln(x)} \Leftrightarrow x = -\ln(\ln(x)) & \Rightarrow & \phi'(x) = -\dfrac{1}{x(\ln(x))} \quad \Rightarrow \\ \\ \ln(x) = e^{-x} \Leftrightarrow x = e^{e^{-x}} & \Rightarrow & \phi'(x) = -e^{e^{-x}} e^{-x} \quad \Rightarrow \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} |\phi'(\alpha)| = \left|\dfrac{1}{\alpha(\ln(\alpha))}\right| & = & \left|\dfrac{1}{\alpha e^{-\alpha}}\right| = \left|\dfrac{e^{\alpha}}{\alpha}\right| > 1, \text{ ya que } e^x > x \ \forall x \\ \\ |\phi'(\alpha)| = \left|e^{e^{-\alpha}} e^{-\alpha}\right| & = & \left|e^{\ln(\alpha)} e^{-\alpha}\right| = |\alpha\, e^{-\alpha}| = \left|\dfrac{\alpha}{e^{\alpha}}\right| < 1, \text{ ya que } e^x > x \ \forall x \end{array} \right\}$$

Por lo tanto, el esquema de aproximaciones sucesivas asintóticamente convergente será:

$$x_{k+1} = e^{e^{-x_k}}$$

Solución 9.c El Método de Newton será:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{x_k}\ln(x_k) - 1}{e^{x_k}\ln(x_k) + \dfrac{e^{x_k}}{x_k}}$$

Solución 9.d Calculamos las primeras 5 iteraciones.

x_i	Aprox. suc.	Newton
x_0	1.7320508076	1.7320508076
x_1	1.1935370462	1.4015286239
x_2	1.3541136672	1.3146236580
x_3	1.2945666720	1.3098132391
x_4	1.3152366056	1.3097995859
x_5	1.3078843193	1.3097995858
$\vdots$	$\vdots$	

Como era de esperar, el método de Newton converge muy rápidamente, debido a su convergencia cuadrática, mientras que el método de aproximaciones sucesivas, lineal, necesita un mayor número de iteraciones.

Solución 9.e

```
implicit integer*4(i-n)
implicit real*8(a-h,o-z)

x0=sqrt(3.0d+00)
x=0.0d+00

write(6,*)'introduzca tolerancia'
read(5,*)tol

itera=0
dif=dabs(x-x0)

write(6,*)'k= ',0,'x_k= ',x0
do while(dif.gt.tol)
   itera=itera+1
   x=dexp(dexp(-x0))
   dif=dabs(x-x0)
   x0=x
   write(6,*)'k= ',itera,'x_k= ',x
```

```
enddo

read(5,*)
end
```