INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

PRÁCTICA 3 **Curso 2024-2025**

1. Proponer de forma justificada una aproximación inicial para el cálculo de las raíces de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \tan(x) - x$; $x > 0$

   b) $f(x) = x - \cos(x) - 1$

   c) $f(x) = \tan(x) + \mu x, \quad \mu > 1$; $x > 0$

   d) $f(x) = \ln(x) - \ln(1-x) + 5(1+x)$, para $|x| \ll 1$

   e) $f(x) = \cosh(x) - x - 2$

2. Se sabe que el polinomio $P(x) = x^4 + 6x - 1$ tiene una raíz real α, tal que $0 < \alpha < 0{,}2$

   a) Calcular para qué valores de la constante ϕ es asintóticamente convergente el algoritmo iterativo:
   $$x_{k+1} = x_k - \phi P(x_k)$$

   b) Proponer un valor inicial para la sucesión.

   c) Obtener la raíz del problema partiendo de la aproximación inicial propuesta para un valor adecuado de la constante ϕ

   d) Plantear la obtención de la raíz mediante el método de Newton a partir de la aproximación inicial obtenida en b).

   e) Realizar un programa de ordenador que realice los cálculos para los dos apartados anteriores. Imponer un criterio de convergencia del método que permita obtener la solución con 10 cifras significativas exactas.

3. Un ingeniero proyecta la construcción de un puente arco simétrico de 400 m de longitud de vano. Desde un punto de vista estructural la geometría del arco más adecuada corresponde a la definida por la función:
   $$y(x) = \frac{-5(x-200)^2}{2000} + 100$$
   tomando como origen de coordenadas la cimentación del arco del puente. Sin embargo, el trazado de la carretera que discurre sobre el puente tiene que pasar necesariamente a una altura constante de 60 m. Por tanto, se pide:

   a) Obtener una aproximación inicial de las coordenadas x en las que se cruzará el arco con el trazado de la carretera.

   b) Si se asume que no se pueden calcular raíces cuadradas, proponer un algoritmo de aproximaciones sucesivas que nos permita obtener la coordenada de la intersección del arco con el tablero del puente.

   c) Realizar un estudio asintótico de convergencia para este algoritmo. Proponer, en el caso de que el algoritmo anterior no resulte adecuado, un algoritmo de aproximaciones sucesivas alternativo que sea asintóticamente convergente.

d) Plantear la obtención de las coordenadas mediante el método de Newton.

e) Realizar un programa de ordenador que calcule la solución del problema mediante el método de aproximaciones sucesivas y mediante el método de Newton partiendo de la aproximación inicial $x_0 = 100$. ¿Coinciden los resultados obtenidos con los esperados? ¿Se comportan los algoritmos de la forma esperada?

NOTA: Considérese un criterio de convergencia para todos los algoritmos iterativos que permita obtener la solución con 12 cifras significativas exactas.

4. Para resolver un problema de ingeniería es necesario hallar la primera raíz positiva de la función

$$f(x) = x - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Para calcular la raíz se propone la utilización de un método de iteración funcional.

Teniendo presente lo anterior, se pide:

a) Proponer un valor inicial aproximado de la raíz del problema planteado y justificarlo.

b) Proponer un método de aproximaciones sucesivas que sea asintóticamente convergente y comprobar que lo es.

c) Plantear la obtención de la primera raíz positiva de f por el método de Newton.

d) Calcular los tres primeros términos (x_1, x_2, x_3) de la sucesión obtenida mediante el algoritmo de aproximaciones sucesivas y mediante el método de Newton. Utilizar en ambos casos la aproximación inicial $x_0 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Comparar los resultados obtenidos por ambos métodos. ¿Coinciden los resultados con las predicciones teóricas?

e) Desarrollar un programa de ordenador en lenguaje Fortran que permita realizar el cálculo propuesto en el apartado anterior para el método de Newton y que muestre los valores calculados por pantalla.

5. Para resolver un problema de ingeniería es necesario hallar la primera raíz positiva de la función

$$f(x) = x\tan(x) - 1.$$

Para calcular la raíz se empleará un método de iteración funcional.

Teniendo presente lo anterior, se pide:

a) Proponer un método de aproximaciones sucesivas que sea asintóticamente convergente y comprobar que lo es.

b) Plantear la obtención de la primera raíz positiva de f por el método de Newton.

c) Calcular la primera raíz positiva de f mediante el algoritmo de aproximaciones sucesivas y mediante el método de Newton. Utilizar en ambos casos la aproximación inicial $x_0 = 1$. Comparar los resultados obtenidos por ambos métodos. ¿Coinciden los resultados con las predicciones teóricas?

6. Se desean estudiar las propiedades de un algoritmo de iteración funcional para el problema $f(x) = 0$ de modo que mejore en la medida de lo posible su comportamiento. El algoritmo se define como:

$$\phi(x) = x + \sum_{i=1}^{n} a_i \left(f(x)\right)^i$$

Se pide:

a) Deducir el coeficiente a_1 de modo que el algoritmo resultante tenga el mayor orden de convergencia posible para $n = 1$

b) Repetir el cálculo anterior y obtener los coeficientes a_1 y a_2 para $n = 2$

7. Para resolver un problema de ingeniería es necesario hallar la (única) raíz de la función

$$f(x) = x\ \ln(x) - 1$$

Para calcular la raíz se propone la utilización de un método de iteración funcional.

Teniendo presente lo anterior, se pide:

a) Proponer una aproximación inicial de la raíz del problema de forma justificada.

b) Proponer un método de aproximaciones sucesivas que sea asintóticamente convergente y comprobar que lo es.

c) Plantear la obtención de la raíz de f por el método de Newton.

d) Calcular los cinco primeros términos de la sucesión obtenida mediante el algoritmo de aproximaciones sucesivas y mediante el método de Newton. Utilizar en ambos casos la aproximación inicial $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Comparar los resultados obtenidos por ambos métodos. ¿Coinciden los resultados con las predicciones teóricas?

e) Desarrollar un programa de ordenador en lenguaje Fortran que permita obtener la raíz mediante el método de Newton y que muestre los resultados. Se fijará un número de iteraciones máximo a realizar por el programa.

8. Para resolver un problema de ingeniería es necesario hallar la raíz de la función

$$f(x) = x + \ln(x).$$

Se pide:

a) Estudiar la convergencia asintótica del algoritmo de aproximaciones sucesivas

$$x_{k+1} = \Phi_1(x_k); \quad \Phi_1(x) = -\ln(x).$$

b) Estudiar la convergencia asintótica del algoritmo de aproximaciones sucesivas

$$x_{k+1} = \Phi_2(x_k); \quad \Phi_2(x) = e^{-x}.$$

c) Plantear la obtención de la raíz por el método de Newton.

d) Utilizando la aproximación inicial $x_0 = 1/2$, calcular las cinco primeras iteraciones de los algoritmos descritos en los apartados anteriores. ¿Concuerdan los resultados obtenidos con las predicciones teóricas? ¿Cuál parece el algoritmo más adecuado? ¿Por qué?

9. Para resolver un problema de ingeniería es necesario hallar la única raíz de la función

$$f(x) = \mathrm{e}^x \ \ln(x) - 1$$

Para calcular la raíz se propone la utilización de un método de iteración funcional.

Teniendo presente lo anterior, se pide:

a) Proponer una aproximación inicial de la raíz del problema de forma justificada.

b) Proponer un método de aproximaciones sucesivas que sea asintóticamente convergente y comprobar que lo es.

c) Plantear la obtención de la raíz de f por el método de Newton.

d) Calcular los cinco primeros términos de la sucesión obtenida mediante el algoritmo de aproximaciones sucesivas y mediante el método de Newton. Utilizar en ambos casos la aproximación inicial $x_0 = \sqrt{3}$. Comparar los resultados obtenidos por ambos métodos. ¿Coinciden los resultados con las predicciones teóricas?

e) Desarrollar un programa de ordenador en lenguaje Fortran que permita obtener la raíz mediante el método de aproximaciones sucesivas y que muestre los resultados en la pantalla del ordenador. El programa finalizará el proceso iterativo cuando la diferencia de la aproximación entre dos iteraciones consecutivas en valor absoluto sea menor a un cierto valor predefinido por el usuario.