INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

PRÁCTICA 2 **Curso 2025-2026**

1.— En un programa de ordenador es preciso evaluar para valores pequeños de x en valor absoluto ($|x| \ll 1$) las siguientes funciones

$$f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$$

$$g(x) = \sin(2x) - 2\sin(x)$$

$$h(x) = \cos^2(x) - \cos(2x)$$

Se pide:

a) ¿Es numéricamente estable esta forma de realizar los cálculos?

b) En cada caso, proponer un procedimiento alternativo que permita evaluar las funciones de forma numéricamente estable y que sea analíticamente equivalente.

c) En cada caso, proponer un procedimiento alternativo que sea lo más sencillo posible y que permita evaluar las funciones de forma numéricamente estable y que sea asintóticamente equivalente (para valores pequeños de x en valor absoluto).

2.— En un cálculo es preciso evaluar la función:

$$f(x) = 1 - (1-x)(1+x) = x^2$$

para valores de x tales que $|x| \ll 1$.
Se utiliza un ordenador que utiliza m bits para el almacenamiento de la mantisa (incluido el signo) en coma flotante, y que redondea por aproximación.

a) ¿Se debe calcular $f(x)$ como $1-(1-x)(1+x)$ o como x^2? (en el último caso el cálculo se realiza multiplicando la variable x por sí misma).

b) Establecer los errores relativos en los dos casos.

c) ¿Qué operación es mejor según el valor de x?

d) Presentar un ejemplo numérico de la conveniencia de usar uno u otro método cuando los cálculos se realizan manualmente con ayuda de una calculadora, y se redondea por aproximación con tres dígitos decimales significativos.

3.— En un ordenador digital se calcula la suma

$$S_n = \overbrace{a + a + \ldots + a}^{n \text{ veces}},$$

donde a es un número cualquiera cuyo error inherente es r_a^I. Las operaciones se realizan en coma flotante, destinando m bits a la mantisa (incluido el signo). Se pide:

a) Calcular el error total del resultado que se obtiene al realizar la operación anterior. Indicar qué parte del error total se debe a la propagación del error inherente del dato a y qué parte se debe a la propagación de los errores de almacenamiento de las operaciones intermedias.

b) Analizar cómo crece el error máximo al aumentar el valor de n.

c) Repetir los apartados anteriores suponiendo que el cálculo se realiza de la forma $S_n = n \cdot a$. Comparar los resultados obtenidos en los dos casos.

4.— En un programa FORTRAN es preciso calcular la función

$$f(x) = \tan(x) - \sin(x).$$

Se espera que se produzcan grandes errores de redondeo para valores de x tales que $|x| \ll 1$. Para poder calcular con suficiente precisión estos casos se plantean dos posibilidades:

1. sustituir la expresión de la función $f(x)$ por otra que sea analíticamente equivalente a la original (llamémosle $g(x) = f(x)$), pero que no produzca grandes errores de redondeo cuando $|x| \ll 1$.
2. sustituir la expresión original de la función $f(x)$ por otra que sea lo más sencilla posible y asintóticamente equivalente a la original cuando $|x| \to 0$ (llamémosle $h(x) \approx f(x)$), pero que no produzca grandes errores de redondeo cuando $|x| \ll 1$.

Se pide:

a) Proponer razonadamente la expresión $g(x)$ que conviene utilizar.

b) Proponer razonadamente la expresión $h(x)$ que conviene utilizar.

c) Obtener la expresión del error total que se obtiene al calcular la función mediante las expresiones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ para un valor arbitrario de x.

d) Analizar qué sucede cuando $|x| \ll 1$, y verificar que las expresiones $g(x)$ y $h(x)$ se comportan como estaba previsto.

5.— Repetir el ejercicio anterior para la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$$

6.— En un programa de ordenador es preciso calcular la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}.$$

Se espera que se produzcan grandes errores de redondeo para valores de x tales que $|x| \ll 1$. Por este motivo, para poder calcular con suficiente precisión estos casos se plantean dos posibilidades:

1. sustituir la expresión de la función $f(x)$ por otra que sea analíticamente equivalente a la original (llamémosle $g(x) = f(x)$), pero que no produzca grandes errores de redondeo cuando $|x| \ll 1$.

2. sustituir la expresión original de la función $f(x)$ por otra que sea lo más sencilla posible y asintóticamente equivalente a la original cuando $|x| \to 0$ (llamémosle $h(x) \approx f(x)$), pero que no produzca grandes errores de redondeo cuando $|x| \ll 1$.

Se pide:

a) Proponer razonadamente la expresión $g(x)$ que conviene utilizar.

b) Proponer razonadamente la expresión $h(x)$ que conviene utilizar.

c) Obtener la expresión del error total que se obtiene al calcular la función mediante las expresiones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ para un valor arbitrario de x.

d) Analizar qué sucede cuando $|x| \ll 1$, y verificar que las expresiones $g(x)$ y $h(x)$ se comportan como estaba previsto.

7.— En un programa de ordenador es preciso calcular la función

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1.$$

Se espera que se produzcan grandes errores de redondeo para valores de x tales que $|x| \ll 1$. Por este motivo, para poder calcular con suficiente precisión estos casos se plantean dos posibilidades:

1. sustituir la expresión de la función $f(x)$ por otra que sea analíticamente equivalente a la original (llamémosle $g(x) = f(x)$), pero que no produzca grandes errores de redondeo cuando $|x| \ll 1$.
2. sustituir la expresión original de la función $f(x)$ por otra que sea lo más sencilla posible y asintóticamente equivalente a la original cuando $|x| \to 0$ (llamémosle $h(x) \approx f(x)$), pero que no produzca grandes errores de redondeo cuando $|x| \ll 1$.

Se pide:

a) Proponer razonadamente la expresión $g(x)$ que conviene utilizar.

b) Proponer razonadamente la expresión $h(x)$ que conviene utilizar.

c) Obtener la expresión del error total que se obtiene al calcular la función mediante las expresiones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ para un valor arbitrario de x.

d) Analizar qué sucede cuando $|x| \ll 1$, y verificar que las expresiones $g(x)$ y $h(x)$ se comportan como estaba previsto.

8.— En un programa de ordenador es preciso calcular la función

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}.$$

Se espera que se produzcan grandes errores de redondeo para valores de x tales que $|x| \ll 1$. Por este motivo, para poder calcular con suficiente precisión estos casos se plantean dos posibilidades:

1. sustituir la expresión de la función $f(x)$ por otra que sea analíticamente equivalente a la original (llamémosle $g(x) = f(x)$), pero que no produzca grandes errores de redondeo cuando $|x| \ll 1$.

2. sustituir la expresión original de la función $f(x)$ por otra que sea lo más sencilla posible y asintóticamente equivalente a la original cuando $|x| \to 0$ (llamémosle $h(x) \approx f(x)$), pero que no produzca grandes errores de redondeo cuando $|x| \ll 1$.

Se pide:

a) Proponer razonadamente la expresión $g(x)$ que conviene utilizar.

b) Proponer razonadamente la expresión $h(x)$ que conviene utilizar.

c) Obtener la expresión del error total que se obtiene al calcular la función mediante las expresiones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ para un valor arbitrario de x.

d) Analizar qué sucede cuando $|x| \ll 1$, y verificar que las expresiones $g(x)$ y $h(x)$ se comportan como estaba previsto.