SPLINES

1.– NOTACIÓN

Se considera el dominio $[a, b]$ discretizado en un conjunto de $(n+1)$ puntos base $\{x_i, f(x_i)\}$, $i = 0, n$, siendo $x_0 = a$ y $x_n = b$. Se denomina **spline** $S_j(x)$ a la función interpolante definida en el subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para $j = 0, n-1$. En cada uno de los j subintervalos $(j = 0, n-1)$ se definen los valores de h_j y t_j como

$$h_j = x_{j+1} - x_j \qquad t_j = f(x_{j+1}) - f(x_j)$$

Cuando se requieran, se definirán la pendiente $(S_i' = f'(x_i))$ y la curvatura $(S_i'' = f''(x_i))$ en cada uno de los puntos base $\{x_i\}$, $i = 0, n$.

Se denominan $f[x_i, x_{i-1}]$ y $f[x_{i+1}, x_i, x_{i-1}]$ a las **diferencias relativas de primer orden y segundo orden**:

$$f[x_i, x_{i-1}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, \qquad f[x_{i+1}, x_i, x_{i-1}] = \frac{f[x_{i+1}, x_i] - f[x_i, x_{i-1}]}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

2.– SPLINES C^0

2.1.– Interpolación Lineal

Se precisa la información en $(n+1)$ puntos base $\{x_i, f(x_i)\}$, $i = 0, n$.

$$\boxed{S_j(x) = f(x_j) + \frac{t_j}{h_j}(x - x_j), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \qquad j = 0, n-1}$$

2.2.– Interpolación mediante Parábolas Promediadas

Se precisa la información en $(n+1)$ puntos base $\{x_i, f(x_i)\}$, $i = 0, n$.

$$\begin{aligned} S_j(x) = \frac{1}{2}\Big[& f(x_{j-1}) + f[x_j, x_{j-1}](x - x_{j-1}) + f[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}](x - x_{j-1})(x - x_j) \\ & + f(x_j) + f[x_{j+1}, x_j](x - x_j) + f[x_{j+2}, x_{j+1}, x_j](x - x_j)(x - x_{j+1}) \Big], \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \qquad j = 0, n-1 \end{aligned}$$

3.– SPLINES C^1

3.1.– Interpolación Parabólica Recurrente

Se precisa la información en $(n+1)$ puntos base $\{x_i, f(x_i)\}$, $i = 0, n$ y la pendiente en un punto, por ejemplo en x_0 dada por $S_0' = f'(x_0)$.

$$\boxed{S_j(x) = f(x_j) + (S_j')\,(x - x_j) + \left(\frac{t_j - h_j\, S_j'}{h_j^2}\right)(x - x_j)^2, \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \qquad j = 0, n-1}$$

Las pendientes que se necesitan S_i', $i = 1, n-1$ se calculan de forma recurrente conocida la pendiente en x_0 (S_0'):

$$S_i' = 2\frac{t_{i-1}}{h_{i-1}} - S_{i-1}', \qquad i = 1, n-1$$

3.2.– Interpolación Cúbica

Se precisa la información en $(n+1)$ puntos base $\{x_i, f(x_i)\}$, $i = 0, n$ y las pendientes en los $(n+1)$ puntos base $\{x_i, S_i'\}$, $i = 0, n$.

$$
\boxed{S_j(x) = f(x_j) + (S'_j)(x - x_j) + \left(\frac{3t_j - h_j(S'_{j+1} + 2S'_j)}{h_j^2}\right)(x - x_j)^2 + \left(\frac{h_j(S'_{j+1} + S'_j) - 2t_j}{h_j^3}\right)(x - x_j)^3, \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, n-1}
$$

Las pendientes que se necesitan S'_i, $i = 0, n$ o bien se conocen o deben estimarse de algún modo como se propone seguidamente.

3.2.1.– Estimación Lineal de las Pendientes

$$
S'_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}, \qquad i = 1, n-1
$$

Los valores de las pendientes en los extremos (S'_0 y S'_n) se eligen arbitrariamente.

3.2.2.– Estimación Parabólica de las Pendientes

$$
S'_i = f[x_{i-1}, x_i] + h_{i-1} f[x_{i+1}, x_i, x_{i-1}], \qquad i = 1, n-1
$$

Los valores de las pendientes en los extremos (S'_0 y S'_n) se eligen arbitrariamente.

4.– SPLINES C^2: Interpolación Cúbica con Derivada Segunda Continua

4.1.– Formulación en Curvaturas

Se precisa la información en $(n+1)$ puntos base $\{x_i, f(x_i)\}$, $i = 0, n$, más 2 condiciones adicionales.

$$
\boxed{S_j(x) = f(x_j) + \left(\frac{t_j}{h_j} - \frac{h_j(S''_{j+1} + 2S''_j)}{6}\right)(x - x_j) + \left(\frac{S''_j}{2}\right)(x - x_j)^2 + \left(\frac{S''_{j+1} - S''_j}{6h_j}\right)(x - x_j)^3, \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, n-1}
$$

Las curvaturas S''_i, $i = 0, n$ en los puntos base se obtienen de la resolución del sistema de ecuaciones lineales

$$
\boxed{\mu_j S''_{j-1} + 2S''_j + \lambda_j S''_{j+1} = d_j, \qquad j = 1, n-1}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & \lambda_{n-2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} S''_0 \\ S''_1 \\ S''_2 \\ S''_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ S''_{n-1} \\ S''_n \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ d_{n-1} \end{Bmatrix}
$$

siendo

$$
\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_j + h_{j-1}}; \qquad \lambda_j = 1 - \mu_j; \qquad d_j = \frac{6}{h_j + h_{j-1}}\left(\frac{t_j}{h_j} - \frac{t_{j-1}}{h_{j-1}}\right)
$$

Este sistema tiene $(n-1)$ ecuaciones y $(n+1)$ incógnitas por lo que se precisa introducir DOS condiciones adicionales para obtener un sistema compatible y determinado.

4.2.– Formulación en Pendientes

Se precisa la información en $(n+1)$ puntos base $\{x_i, f(x_i)\}$, $i = 0, n$, más 2 condiciones adicionales.

$$\boxed{S_j(x) = f(x_j) + (S'_j)\,(x-x_j) + \left(\frac{3t_j - h_j(S'_{j+1} + 2S'_j)}{h_j^2}\right)(x-x_j)^2 + \left(\frac{h_j(S'_{j+1} + S'_j) - 2t_j}{h_j^3}\right)(x-x_j)^3, \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, n-1}$$

Las pendientes S'_i, $i = 0, n$ en los puntos base se obtienen de la resolución del sistema de ecuaciones lineales

$$\boxed{\lambda_j S'_{j-1} + 2S'_j + \mu_j S'_{j+1} = e_j, \qquad j = 1, n-1}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 2 & \mu_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & 2 & \mu_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ S'_{n-1} \\ S'_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ e_{n-1} \end{Bmatrix}$$

siendo

$$\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_j + h_{j-1}}; \qquad \lambda_j = 1 - \mu_j; \qquad e_j = 3\left(\frac{\mu_j\, t_j}{h_j} + \frac{\lambda_j\, t_{j-1}}{h_{j-1}}\right)$$

Este sistema tiene $(n-1)$ ecuaciones y $(n+1)$ incógnitas por lo que se precisa introducir DOS condiciones adicionales para obtener un sistema compatible y determinado.

4.3.– Condiciones Adicionales que pueden imponerse

Las condiciones adicionales pueden ser o bien valores de las curvaturas o de las pendientes en uno o dos puntos, o bien relaciones en forma de ecuaciones entre los valores de las curvaturas o de las pendientes en dos o más puntos.

4.3.1.– Curvaturas conocidas en los contornos

Si se conocen las curvaturas en los dos extremos (S''_0 y S''_n), el cálculo de las curvaturas en los restantes puntos en la **formulación en curvaturas** supone resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S''_1 \\ S''_2 \\ S''_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ S''_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ d_{n-1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu_1\, S''_0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ ... \\ 0 \\ \lambda_{n-1}\, S''_n \end{Bmatrix}$$

En el caso particular en el que las curvaturas son nulas en ambos extremos, es decir

$$S''_0 = 0; \qquad S''_n = 0$$

se obtiene el denominado **spline natural**, que tiene la propiedad de minimizar el funcional cuadratura media.

4.3.2.– Pendientes conocidas en los contornos

Si se conocen las pendientes en los dos extremos (S'_0 y S'_n), el cálculo de las pendientes en los restantes puntos en la **formulación en pendientes** supone resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & 2 & \mu_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ S'_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ e_{n-1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \lambda_1\, S'_0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ ... \\ 0 \\ \mu_{n-1}\, S'_n \end{Bmatrix}$$

Si se conocen las pendientes en los dos extremos (S'_0 y S'_n), el cálculo de las curvaturas en todos los puntos en la **formulación en curvaturas** supone resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S''_0 \\ S''_1 \\ S''_2 \\ S''_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ S''_{n-1} \\ S''_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6(t_0 - h_0\, S'_0)/h_0^2 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ d_{n-1} \\ 6(-t_{n-1} + h_{n-1}\, S'_n)/h_{n-1}^2 \end{Bmatrix}$$

4.3.3.– Condiciones periódicas

Consisten en imponer condiciones de la forma

$$S'_0 = S'_n$$

que conducen al sistema de ecuaciones lineales en la **formulación en pendientes**

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & 2 & \mu_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ S'_{n-1} \\ S'_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ e_{n-1} \\ e_n \end{Bmatrix}$$

o bien condiciones de la forma

$$S''_0 = S''_n$$

que conducen al sistema de ecuaciones lineales en la **formulación en curvaturas**

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & 2 & \lambda_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S''_1 \\ S''_2 \\ S''_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ S''_{n-1} \\ S''_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ d_{n-1} \\ d_n \end{Bmatrix}$$

En ambos casos se obtienen los denominados **splines periódicos**.

4.3.4.– Otros criterios

Otros tipos de condiciones adicionales consisten por ejemplo en efectuar interpolaciones cuadráticas en intervalos extremos:

$$S''_0 = S''_1; \qquad S''_{n-1} = S''_n$$

En otros casos se puede imponer que la interpolación empleada para los dos primeros intervalos sea la misma cúbica, esto es,

$$\frac{S''_2 - S''_1}{h_1} = \frac{S''_1 - S''_0}{h_0}$$

lo que implica que en el punto x_1 la continuidad es entonces de orden 3. Esta misma condición aplicada para los dos últimos intervalos (los dos últimos intervalos se interpolan con la misma cúbica) conduce a

$$\frac{S''_n - S''_{n-1}}{h_{n-1}} = \frac{S''_{n-1} - S''_{n-2}}{h_{n-2}}$$

es decir, en el punto x_{n-1} la continuidad es entonces de orden 3.