FAMILIAS CLÁSICAS DE POLINOMIOS ORTOGONALES

Polinomios de Legendre $P_n(x)$

Definición

Los polinomios de Legendre son ortogonales en $[-1, +1]$ respecto de la función $\omega(x) = 1$ y se definen como:

$$P_n(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

La función $y(x)$ es la solución del siguiente problema de contorno:

$$\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}} = 0; \quad y(-1) = y'(-1) = \ldots = y^{n-1)}(-1) = 0; \quad y(+1) = y'(+1) = \ldots = y^{n-1)}(+1) = 0$$

es decir, $y(x) = k(x^2 - 1)^n$. La constante k se elige arbitrariamente $k = \frac{1}{2^n n!}$.

Fórmula de recurrencia de generación de la familia de polinomios

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x); \qquad P_0(x) = 1; \qquad P_1(x) = x$$

Polinomios de Laguerre $L_n^*(x)$

Definición

Los polinomios de Laguerre son ortogonales en $[0, +\infty)$ respecto de la función $\omega(x) = e^{-x}$ y se definen como:

$$L_n^*(x) = e^x \frac{d^n y}{dx^n}$$

La función $y(x)$ es la solución del siguiente problema de contorno:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(e^x \frac{d^n y}{dx^n} \right) = 0; \quad y(0) = y'(0) = \ldots = y^{n-1)}(0) = 0; \quad y(+\infty) = y'(+\infty) = \ldots = y^{n-1)}(+\infty) = 0$$

es decir, $y(x) = k e^{-x} x^n$. La constante k se elige arbitrariamente $k = 1$.

Fórmula de recurrencia de generación de la familia de polinomios

$$L_n^*(x) = (2n - 1 - x) L_{n-1}^*(x) - (n-1)^2 L_{n-2}^*(x); \qquad L_0^*(x) = 1; \qquad L_1^*(x) = 1 - x$$

Polinomios de Hermite $H_n(x)$

Definición

Los polinomios de Hermite son ortogonales en $(-\infty, +\infty)$ respecto de la función $\omega(x) = e^{-x^2}$ y se definen como:

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n y}{dx^n}$$

La función $y(x)$ es la solución del siguiente problema de contorno:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(e^{x^2} \frac{d^n y}{dx^n} \right) = 0; \quad y(-\infty) = y'(-\infty) = \ldots = y^{n-1)}(-\infty) = 0; \quad y(+\infty) = y'(+\infty) = \ldots = y^{n-1)}(+\infty) = 0$$

es decir, $y(x) = k e^{-x^2}$. La constante k se elige arbitrariamente $k = (-1)^n$.

Fórmula de recurrencia de generación de la familia de polinomios

$$H_n(x) = 2x H_{n-1}(x) - 2(n-1) H_{n-2}(x); \qquad H_0(x) = 1; \qquad H_1(x) = 2x$$

Polinomios de Tchebyshev $T_n(x)$

Definición

Los polinomios de Tchebyshev son ortogonales en $[-1, +1]$ respecto de la función $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ y se definen como:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Fórmula de recurrencia de generación de la familia de polinomios

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x); \qquad T_0(x) = 1; \qquad T_1(x) = x$$